

申请上海交通大学硕士学位论文

模拟电路带宽和相位裕度的符号化优化方法研究¹

学 校： 上海交通大学

院 系： 微电子学院

班 级： Z0721091

学 号： 1072109064

姓 名： 曾媚

专 业： 软件工程

导 师： 施国勇 教授

上海交通大学微电子学院

2009 年 12 月

¹此研究由上海市浦江人才基金(项目编号 07pj14053)和国家自然科学基金(项目编号 60876089)资助。

A Dissertation Submitted to Shanghai Jiao Tong University for

Master Degree

**SYMBOLIC TECHNIQUES FOR BAND WIDTH
AND PHASE MARGIN OPTIMIZATION
IN ANALOG INTEGRATED CIRCUIT DESIGN**

Author: ZENG, Mei

Specialty: Software Engineering

Advisor: Prof. SHI, Guo-yong

School of Microelectronics

Shanghai Jiao Tong University

Shanghai, P.R.China

December 8, 2009

上海交通大学

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权上海交通大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密，在_____年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密。

(请在以上方框内打“√”)

学位论文作者签名：

指导教师签名：

日期： 年 月 日

日期： 年 月 日

上海交通大学

学位论文 0020 文原创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：

日期： 年 月 日

模拟电路带宽和相位裕度的符号化优化方法研究

摘要

目前，如 Spice 等模拟电路仿真工具大多采用数值分析的方法，因而当电路参数发生改变时必须重新执行整个计算过程，且很难预计电路参数的改变对电路性能的影响。本文提出了一种符号化的模拟电路带宽和相位裕度自动优化方法，这种方法以基于电路拓扑结构的模拟电路符号化仿真器为基础，对系统带宽、相位裕度等重要电路特性提供了合理的近似分析和研究方案，根据系统带宽和相位裕度在数学表征上的特点进行了电路元件交流灵敏度的提取，并将符号化解析表达与符号化灵敏度信息相结合，实现了系统带宽和相位裕度的自动优化。

与传统的数值分析方法相比，本文提出的算法充分利用了符号化仿真器只需对电路拓扑结构进行简单的图操作即可得到相应的符号化分析结果的特点，避免了电路参数改变时的重复计算，能够方便直观的对电路性能进行调整。

关键字：符号化仿真器，带宽，相位裕度，自动优化

**SYMBOLIC TECHNIQUES FOR BAND WIDTH
AND PHASE MARGIN OPTIMIZATION
IN ANALOG INTEGRATED CIRCUIT DESIGN**

ABSTRACT

Since most analog circuit simulation tools are based on numerical analysis method, the whole calculation process must be re-implemented and the circuit behavior is difficult to predict when the parameters change. This paper introduces a new algorithm based on GRASS (Graph Reduction Analog Symbolic Simulator), which extracts both band width and phase margin symbolically, but also finds a reasonable method to approximate these circuit performances. Combination with the symbolic sensitivity analysis, we can make a great contribution to symbolic band width and phase margin automatic optimization.

Compared with traditional numerical methods, the new symbolic technique takes full advantage of intelligible graph operation and has the ability to adjust the circuit performance conveniently.

Keywords: symbolic simulator, band width, phase margin, automatic optimize

目 录

摘 要	I
ABSTRACT	II
目 录	III
第一章 绪论	1
1.1 符号化分析方法的定义	1
1.2 符号化分析方法的分类	2
1.3 符号化电路分析的历史及应用	4
1.4 基于电路拓扑结构的符号化分析	5
1.5 本文内容概述	6
1.6 本章小结	6
第二章 GRASS 仿真器简介	6
2.1 GRASS 的构建	7
2.1.1 可分析电路的基本条件	7
2.2.2 有向图构建规则	7
2.2.3 有效生成树和生成项分析	8
2.2.4 图约化判定图	9
2.2 传输函数符号化灵敏度分析	12
2.3 一个例子	13
2.4 本章小结	18
第三章 符号化带宽及相位裕度优化方法	19
3.1 符号化判定图的 s 展开	19
3.2 符号化带宽优化方法	22
3.2.1 系统带宽与电路主极点	22
3.2.2 符号化主极点提取	24
3.2.3 主极点的符号化灵敏度	26
3.2.4 符号化带宽自动优化算法	30
3.3 符号化相位裕度优化方法	32
3.3.1 符号化相位裕度分析	33
3.3.2 相位裕度的符号化灵敏度	36
3.3.3 符号化相位裕度优化算法	39
3.4 本章小结	39
第四章 应用案例	41
4.1 $\mu\text{a}741$ 运算放大器仿真结果分析	42
4.1.1 $\mu\text{a}741$ 运算放大器带宽及其自动优化结果分析	42
4.1.2 $\mu\text{a}741$ 运算放大器相位裕度及其自动优化结果分析	47
4.2 $\mu\text{a}725$ 运算放大器仿真结果分析	52
4.2.1 $\mu\text{a}725$ 运算放大器带宽及其自动优化结果分析	53
4.2.2 $\mu\text{a}725$ 运算放大器相位裕度及其自动优化结果分析	54
4.3 米勒补偿三级运算放大器仿真结果分析	56
4.3.1 米勒补偿三级运放带宽及其自动优化结果分析	57

目 录

4.3.2 米勒补偿三级运放带宽及其自动优化结果分析	58
4.4 共源共栅运算放大器仿真结果分析	60
4.4.1 共源共栅运算放大器带宽及其自动优化结果分析	60
4.4.2 共源共栅运算放大器带宽及其自动优化结果分析	62
4.5 本章小结	64
第五章 总结与展望	65
5.1 主要结论	65
5.2 研究展望	65
参 考 文 献	67
符号与标记（附录 1）	69
致 谢	70

第一章 绪论

伴随着计算机、集成电路和电子系统设计的发展，融合了计算数学、优化理论、图论和拓扑学等多学科精髓发展起来的电子设计自动化技术，正日趋成为现代电子设计技术的核心。目前，以数字电路为研究对象的自动设计理论和技术都已经比较成熟，大量数字系统辅助设计工具被广泛运用于工业领域中，如Synopsys的RTL综合工具Design Compiler、Cadence的数字实现系统Encounter等。然而，由于模拟电路本身的复杂性以及对设计经验的依赖，模拟电路设计工具的发展仍面临着许多挑战，模拟电路设计的自动化程度仍有很大的提升空间。

目前，由加州大学伯克利分校研究开发的、以数值分析为基础的模拟电路仿真器Spice^[1]在学术界和工业界都得到了广泛的使用，他可以分析包括各种非线性的二极管及场效应管的电路，也可以对电路的直流偏置特性、交流特性及时域传输特性等进行分析。数值分析工具的一个巨大局限在于，当电路参数发生改变时，必须重新执行整个计算过程才能得到新的分析结果；尽管它能够较好的用于电路设计的验证，但是很难预计电路参数的改变对电路性能的影响。在实际的电路设计过程中，设计者往往希望能够直观得到设计参数和特性曲线的关系，而符号化分析方法由于其符号化的电路表现形式恰恰弥补了数值分析方法的不足。

符号化电路分析方法从上世纪60年代提出至今，已逐渐得到广泛的关注，在分析过程中，电路元件、电压、电流等都以符号的形式表现，电路特性和行为的分析结果都是形式化的公式，因而可以方便的预测和优化电路传输函数、零极点、根轨迹、幅频特性等。随着全定制电路和超大规模集成电路设计复杂度的提高，各项电路参数很难同一时间达到设计指标，因此性能优化成为电路设计中不可或缺的一个重要环节，符号化分析方法通过改变部分电路参数来满足特定设计要求，避免了重复整个设计流程，大大缩短了设计周期；而符号化分析具备预测性，这一特点亦可清晰的揭示电路特性的变化趋势，降低电路设计失败的危险，提高电路设计的自动化程度。

1.1 符号化分析方法的定义

符号化分析方法通过电路自变量（如时间、频率）、因变量（如电压、电流）以及符号化的电路元件，来形式化的计算电路性能和行为；其主要研究对象为线

性电路的频域特性。对于一个集总的线性时不变电路，已知输入，则相应输出的传输函数可以表示成两个多项式相除的形式，其自变量为 x ，如下式：

$$H(x) = \frac{N(x, p_1, \dots, p_m)}{D(x, p_1, \dots, p_m)} = \frac{\sum_i x^i b_i(p_1, \dots, p_m)}{\sum_i x^i a_i(p_1, \dots, p_m)} \quad (1-1)$$

其中， x 是一个复数形式的频率变量（对应连续时域电路的 s 变量，离散时域电路中的 z 变量）， $p_j (j \in [1, m])$ 为电路元件符号；式中多项式系数 $a_i(\dots)$ 及 $b_i(\dots)$ 分别是由电路符号组成的多项式。

若按照电路参数在分析结果中的符号化程度分类，符号化分析方法可以分为全符号化分析、数值化与符号化混合分析和仅限于频率的符号化分析。在全符号化分析中，所有电路参数均以符号化形式出现，多项式系数完全由电路元件的符号组成；而数值化与符号化混合分析，一部分电路参数以符号化的形式出现在表达式中，一部分体现为该电路元件的具体数值；仅限于频率的符号化分析则是将频率变量作为唯一的符号，其他所有电路参数均为数值。

如图 1-1 所示的电路，通过符号化的电路仿真器分析可以得到如下形式的传输函数：

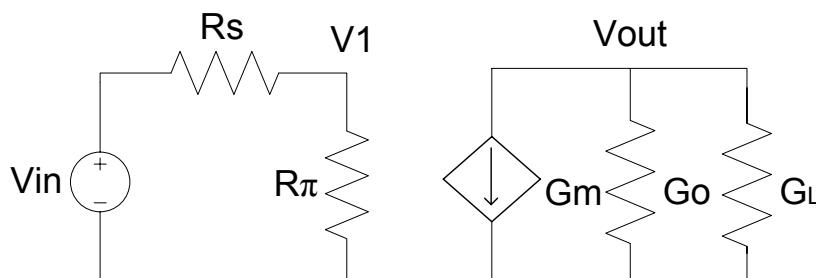


图 1-1 符号化电路分析举例

Fig.1-1 A Symbolic Circuit Example

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{-G_m \cdot G_s}{G_s \cdot G_L + G_\pi \cdot G_L + G_s \cdot G_o + G_\pi \cdot G_o} \quad (1-2)$$

值得注意的是，由于符号化分析的对象主要是线性电路，因此，当电路中存在非线性元件（如 MOSFET 等）或者运算放大器时，要先将其转化为小信号模型后再进行分析。

1.2 符号化分析方法的分类

符号化分析方法大致可以分成代数方法与拓扑方法。我们通过下面这个例子

【2】来描述上述两种基本方法。

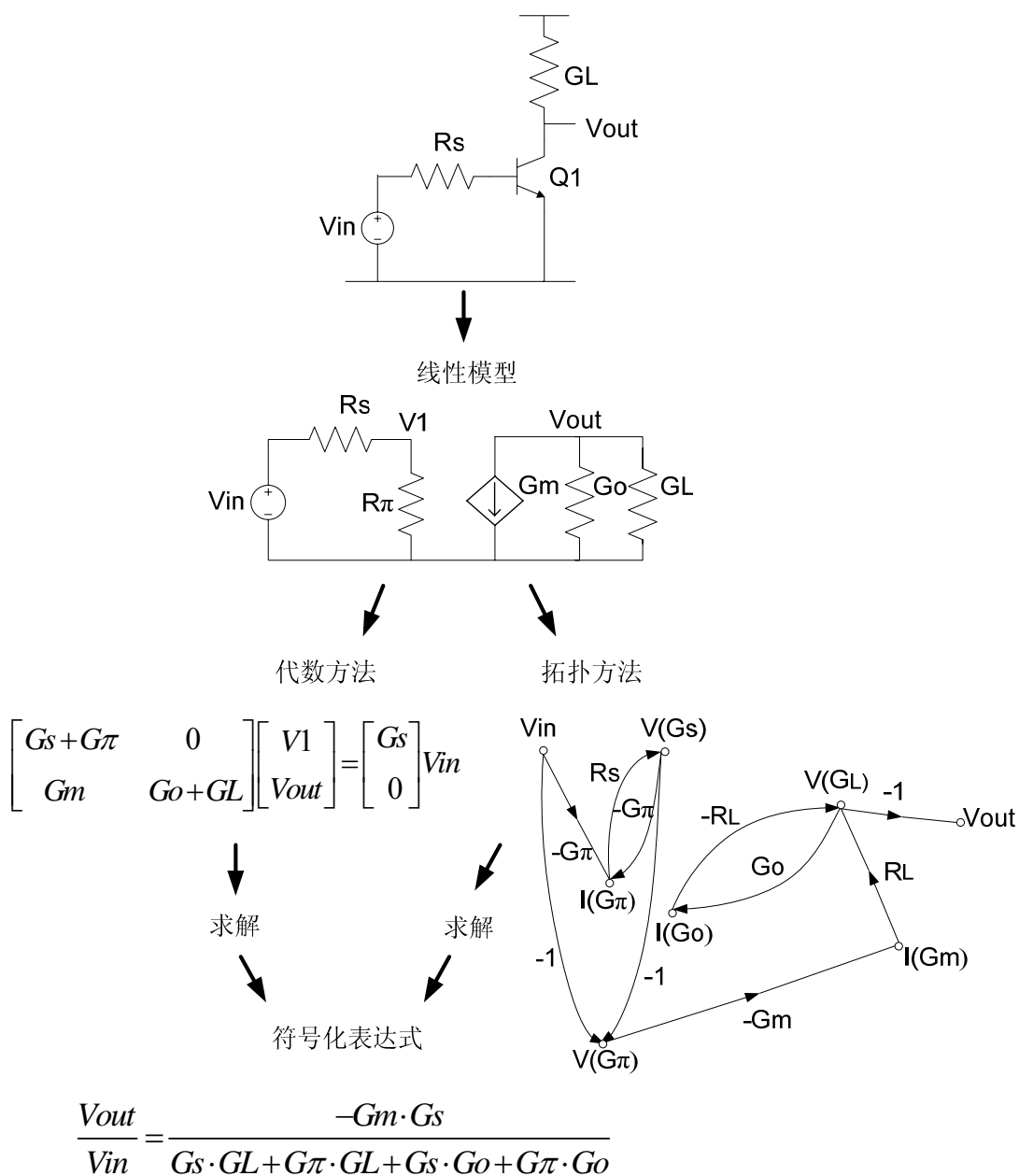


图 1-2 两种符号化电路分析方法的描述

Fig.1-2 2 Kinds of Symbolic Analysis

由图 1-2 可以看出，代数方法主要是通过建立和求解一系列以符号为系数的电路方程，来获得最终的分析结果；而拓扑方法则是将电路本身看作一张以符号为分支权重的图，通过相应的图操作得到所需的符号化的分析结果。

对应于上述两种分类，符号化电路分析算法具体可以分为以下五种：

符号流图法。在所有符号化分析方法中，符号流图法被认为是最灵活、最有效的，它首先根据明确定义的法则构建电路的信号流图，然后使用Mason公式对信号流图进行求解。

生成树枚举法。生成树枚举法是最早提出的符号化分析方法，它建立符合分析算法的电路并枚举电路图生成树，按照一定规则计算每棵生成树所对应的生成项，进而得到完整的电路分析结果。

矩阵行列式法。矩阵行列式法首先根据基尔霍夫定律建立电路状态方程或者MNA (Modified Nodal Analysis) 矩阵，再使用符号化的Gauss消去或者LR分解来求解。

参数提取法。参数提取法是一种数值化与符号化相结合的分析方法，通过递归分解电路方程组所对应的行列式，将其分解为仅包含数值参数的部分和仅包含符号参数的部分，从而提取出电路符号化参数的相关信息。

数值插入法。数值插入法基于电路某些工作点的数值分析结果进行分析。这种分析方法主要以电路在某些特定工作点的数值分析结果为研究对象，特别适用于仅将频率变量 s 作为符号化变量的分析情况，可以计算电路在不同频率下的行为特性。

可以看出，矩阵行列式法和参数提取法属于代数分析法，而符号流图法和生成树枚举法隶属于拓扑分析方法的范畴。

1.3 符号化电路分析的历史及应用

符号化电路分析方法自上个世纪六七十年代起，便逐渐受到广泛关注，开始出现一系列以计算机分析为基础的符号化分析工具，如SNAP【3】和NAPPE【4】等，其主要研究对象为模拟滤波器电路。为了能够获得电路完整的全符号化表达式，基于图形的符号化分析方法应运而生，如生成树枚举法和信号流图法等，其中，信号流图法更是很好的解决了生成项抵消问题；然而，实践证明，由于生成项的数目随着电路规模的增长呈指数上升趋势，传统的基于电路拓扑结构的符号化分析方法对分析电路的规模有一定的局限，仅能分析较小规模的电路。当仅将工作频率看成分析电路的唯一符号化变量时，较大规模电路的分析和设计可以采用数值分析方法，因而，如参数提取法等数值化和符号化分析相结合的半符号化分析方法的提出，大大提高了符号化分析的效率和大规模电路的分析能力。与此同时，纯数值仿真工具SPICE的飞速发展，即便是对大规模电路，其依然具备精确高效的分析能力，这一特点令SPICE很快成为了世界上应用最广的模拟电路分析设计工具，符号化仿真器的研究和发展一度陷入瓶颈。到了19世纪80年代，层次化分解分析方法的提出【5】，克服了符号化分析对电路规模的限制；基于电路矩阵行列式的符号化分析方法亦得到了充分发展，使得符号化分析方法在电路设计领域再度成为热门的研究课题，焕发出新的活力。

迄今为止，已经诞生了许多成功的模拟电路符号化仿真工具。ISAAC【6】

和SCYMBAL【7】可以符号化的分析电容开关电路；SYNAP【8】【9】具备近似的直流分析能力；SAPEC【10】和GASCAP【11】着重于模拟滤波器的符号化分析；SCAPP【12】则为大规模电路提供了层次化的分析方法；ASAP【13】和SSPICE【14】更是可以对模拟电路的零极点进行符号化提取。

在模拟集成电路的设计过程中，符号化分析方法有着广泛的应用。如符号化分析可以提供电路特性的符号化表达式，这些表达式不会随着电路参数的改变而改变，只要代入具体数值即可快速准确的得到计算结果，并且很好的避免了数值计算过程中的舍入误差，大大提高电路分析的可靠度和精度。符号化分析的另一个特点是只要电路结构不发生改变，符号化的分析结果仍然保持不变；在模拟电路设计中，经常需要通过多次参数迭代来获得符合设计要求的性能，数值分析方法需要重新执行整个分析过程，而符号化分析则只需将新的电路参数代入符号化表达式进行计算即可。

当然，符号化分析方法也不可避免的存在着不足之处，如大多符号法分析工具的运算效率仍然较低、仅限于针对线性电路频域特性的分析、以及由于生成项数目随电路规模增大呈指数增长导致的对分析电路规模的限制等。总的说来，模拟电路的符号化分析仍然需要面对上述挑战，存在很大的发展空间。

1.4 基于电路拓扑结构的符号化分析

目前，在所有的符号化分析方法中，被公认的最灵活、最有效的是符号流图法，但是该方法对于分析电路的规模还是有着比较大的限制【2】。文【15】【16】提出了一种全新的拓扑分析方法，该方法建立了组成电路表达式的生成项与电路网络的生成树之间的直接联系，论证了对于一些特定电路元件的枚举方法，但其依旧存在以下局限：首先，该拓扑分析方法并非能够分析所有受控源和理想运算放大器，仅适用于特定类型的受控源；其次，由于没有提出较好的计算机自动化分析算法，在实现上存在一定困难。

文【17】【18】对【15】【16】中提出的方法和思想进行了改进和严格的代数证明，提出了非常清晰的生成树枚举理论，使该方法可以用于一般的线性电路的频域分析；并通过计算机编程实现了这种新的完整符号化模拟电路分析方法，该方法基于电路的拓扑结构，通过对相应由电路转化而成的有向图的操作得到最后的分析结果，使之能够真正应用于具体模拟电路模块的自动化分析。

1.5 本文内容概述

本文共分为五部分。

第一章首先概述了符号化分析算法；第二章对基于电路拓扑结构的符号化仿真器GRASS的原理及实现进行了简单介绍；第三章以GRASS为基础，详细探讨了电路的带宽和相位裕度的符号化自动优化方法；第四章给出了关键性能的符号化自动优化在一系列实际设计中的实验分析；最后，对符号化优化的优缺点以及研究前景进行了总结和展望。

1.6 本章小结

本章系统的介绍了符号化分析方法的定义、分类和历史，可以看出，符号化仿真工具在提高模拟电路设计自动化程度，缩短大规模模拟集成电路设计周期，促进计算机辅助设计工具在模拟集成电路设计利于的发展，起着至关重要的作用。

本文将以一种全新的基于电路拓扑结构的符号化模拟电路仿真工具为基础，讨论如何通过电路重要性能指标的符号化提取，实现电路性能的自动优化。

第二章 GRASS 仿真器简介

GRASS (Graph Reduction Analog Symbolic Simulator) 是迄今为止世界上仅有的几个能成功分析较大规模模拟电路 (20~30 个晶体管) 的符号化模拟电路仿真器之一，他直接利用电路拓扑进行符号化分析，有助于电路设计者根据设计需求直接对电路的关键参数进行调节和优化。

【17】【18】中具体论述了基于电路拓扑结构进行符号化模拟电路分析的方法及相应定理，提出了计算机实现的相关算法，介绍了图约化判定图 (Symbolic Decision Diagram) 的数据结构用以辅助算法的执行和生成项的存储。

【19】则在此基础上实现了电路元件交流灵敏度信息的提取，并应用灵敏度信息来分析实际电路，以证明灵敏度能够在调整设计参数时给出准确的信息和调整的方向，从而缩减设计时间。

2.1 GRASS 的构建

2.1.1 可分析电路的基本条件

能够采用 GRASS 仿真器进行分析的模拟电路，必须满足以下前提条件：

- 电路仅含有 5 类元件：阻抗 (Z)，导纳 (Y)，电压控制电压源 VCVS、电流控制电流源 CCCS、电压控制电流源 VCCS 和电流控制电压源 CCVS 等四种受控源，独立源以及理想运算放大器；
- 电路中只能含有一个独立源。如果含有多个输入源，则分别对每个独立源进行分析，然后将其对于电路的贡献进行叠加；
 - 每个控制源只控制一个受控源；
 - 每个受控源只受一个控制源控制；
 - 电路中不含反馈电路。

2.2.2 有向图构建规则

对于分析电路，需按照下列图构建规则转换为有向图。

(1) 将电路的输入和输出等效为一个受控源。电路传输函数 $H(s)$ 是由输出和输入的比值构成，即

$$H(s) = \frac{H(out)}{H(in)} \quad (2-1)$$

因此，可以将电路输入输出间的关系建模成输入受输出控制的受控源，即输出端为控制源，输入端为受控源，而这个受控源的增益也就是传输函数的倒数，记为 X。

(2) 将受控源和独立源转化成有向边。其中，电压源对应边的方向沿着正极到负极，电流源对应边的方向与电流流向相同。

(3) 对电压控制支路，应当在有向图中添加一条与之对应的有向边；对电流控制支路，应当在有向图中为该支路添加一个结点和一条单独的有向边。

(4) 电路中的每一个元件在有向图中都有相应的有向边与之对应。

(5) 理想运算放大器用零器(Nullor)建模，每一个零器由一对零阻器(Nullator)和一个泛阻器(Norator)组成。

根据上述有向图构建规则，如图 2-1 所示的电路，可以得到如图 2-2 所示的有向图。

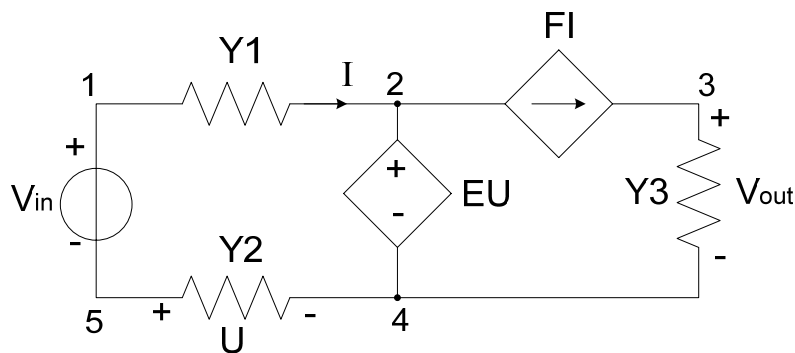


图 2-1 有向图构建规则示例

Fig.2-1 A Circuit Example

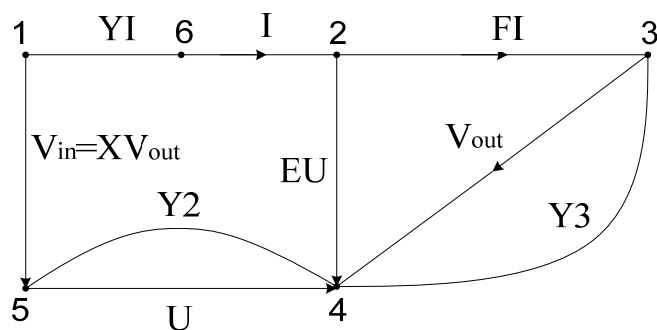


图 2-2 分析电路的有向图

Fig.2-2 Direction Graph for Example Circuit

从上图可以看出，我们将输入输出看作一个电压控制电压源（VCVS），其增益为 X ，则有电路传输函数 $H(s)=1/X$ 。

一般而言，要求流过电压控制源的电流以及电流控制源消耗的电压为零，因此，对于前文提到的四种不同类型的控制源，可以总结出如下规定：

VCVS: $U_i = E_{i,j} U_j, I_j = 0;$

CCCS: $I_i = F_{i,j} I_j, U_j = 0;$

VCCS: $I_i = G_{i,j} U_j, I_j = 0;$

CCVS: $U_i = H_{i,j} I_j, U_j = 0。$

2.2.3 有效生成树和生成项分析

论文【17】提出了一系列基于拓扑法的符号化模拟电路分析定理，这些定理通过分析电路的有向图，对有效生成树进行了明确的定义，给出了通过生成树得

对应的生成项及最终如何得到分析结果的方法。

通常，通过枚举有向图生成树的方法得到的电路特性符号化表达式的生成项，都会出现大量的冗余生成项。由于【17】中对有效生成树给出了严格的定义，因而能够剔除冗余项，避免生成项之间相互抵消现象的发生。这是目前所有符号化模拟电路分析法都没有的特性，可以大大减小冗余项引起的时间和空间开销，提高分析的效率。

在此，我们不再赘述这些已经经过严格代数推导和证明的定理，仅对其思想进行概述。

通过分析电路的拓扑结构，满足分析条件的模拟电路均可通过上节所讲的构建规则得到相应的电路有向图。通过枚举该有向图的有效生成树，可以得到一个有效生成树对，其中，左生成树只含有 Y、Z、VS、CS、CC 和 NO 类型的边（不含 VC 和 NU 边）；右生成树只含有 Y、Z、VS、VC、CC 和 NU 类型的边（不含 CS 和 NO 边）。值得注意的是，所有的受控源的控制边和受控边都将单独进行分析，比如分开处理 CCVS 的 CC 边和 VS 边，但是 CCVS 依旧作为唯一的电路元件。

有效生成树对应的生成项由该生成树树边对应的元件符号的乘积组成，包括生成项符号、所有出现的 Y 和 Z 器件符号和带符号的受控源增益。其中，生成项符号根据下文即将介绍的生成项符号确定算法获得；所有的阻抗器件 Z 均以导纳形式 Z^{-1} 表示；左、右生成树中的 CC 和 VS 边权重均为 1，不影响生成项；对于受控源增益，则是一旦 VS 边出现，则要将增益乘以-1。

有效生成树得到的所有生成项之和为 0。由于电路函数 $H(s)$ 以受控源增益 X 的形式出现，所以生成项可以根据是否包含 X 分为两类，从而得到关于 X 的一次方程，方便解出电路传输函数 $H(s)$ 。

$$X \sum_{i=1}^{m1} t_i + \sum_{j=1}^{m2} T_j = 0 \quad (2-2)$$

$$H(s) = \frac{1}{X} = -\frac{\sum_{i=1}^{m1} t_i}{\sum_{j=1}^{m2} T_j} \quad (2-3)$$

2.2.4 图约化判定图

正如大家所知道的，模拟电路符号化分析的主要难点之一就是电路传输函数的数量与电路规模呈指数关系，因而枚举大规模电路的生成树需要占用大量的时

间和空间资源。

为了能够改进生成树枚举带来的巨大运算量，适应目前计算机的运算能力，【17】中提出了有向图约化算法（Graph Reduction），在约化过程中得到所有有效生成树和生成树对，以二分判定图 BDD（Binary Decision Diagram）【20】的方式进行存储，同时通过生成项符号确定算法确定每个生成项对应的符号，最终以符号化判定图 SDD（Symbolic Decision Diagram）的形式存储所有生成项。

有向图约化算法通过处理电路符号在有向图中对应的边得到 SDD。电路符号是否存在于某个生成项中，只有是或者否这两种选择；关联到有向图的约化，则是要么选择该电路符号对应的边，要么不选择，这亦是一个二分的选择。选择一条边，对应的图操作就是将该边的两个端点汇合成一个结点，这里我们规定总是将结点号大的点 V_{max} 与结点号小的点 V_{min} 汇合，即在移去边的同时将图中剩余边中端点为 V_{max} 的点改为 V_{min} ；排除一条边，则将该边从有向图中删去。

有向图约化算法总结如下：

Step1: 构建电路对应有向图，将该有向图拆分成左、右两个子图，分别删去两个子图中不允许存在的边，并设定电路符号操作的顺序；

值得注意的是，以 BDD 为基础的分析方法十分依赖于变量的排列顺序，如何找到合适的变量排列顺序以节约分析时间和空间，本身就是一个十分值得探讨的问题。这里，我们总是最先处理输入输出符号 X，将其作为整个 SDD 的根结点，这样，根结点的 1-分枝所指向的判定子图代表所有包含 X 符号的生成项，而 0-分枝所指向的判定子图代表所有不包含 X 符号的生成项，可以更加方便的解出未知量 X。从式(2-3)中也可以发现，1-分枝和 0-分枝分别对应了电路传输函数的分子多项式和分母多项式。

Step2: 按照预设定的符号顺序对相应的边进行有向图约化。按表格 2-1 所列举的操作选择或者排除电路元件符号所对应的有向图边；

表 2-1 各类元件的图约化操作

	选择元件		排除元件	
	左子图	右子图	左子图	右子图
VCVS	选择 VS	移去 VS 选择 VC	选择 VS	选择 VS 移去 VC
CCVS	择 VS 移去 CC	选择 CC 移去 VS	选择 VS 选择 CC	选择 VS 选择 CC
VCCS	选择 CS	选择 VC	移去 CS	移去 VC
CCCS	选择 CS	选择 CC	选择 CC 移去 CS	选择 CC

Nullor	选择 NO	选择 NU	移去 NO	移去 NU
Y/Z	选择 Y/Z	选择 Y/Z	移去 Y/Z	移去 Y/Z

Step3: 如果左、右子图均有生成树构成, 即左、右子图都约化为一个结点, 则将判定图边指向终结点 1, 然后转向执行 **Step6**; 如果左、右子图均不可能得到生成树, 则将判定图边指向终结点 0, 然后转向执行 **Step6**; 如前述两个条件均不满足, 则继续执行 **Step4**;

Step4: 依照生成项符号确定算法, 分别确定判定图结点 1-分枝和 0-分枝对应的符号;

Step5: 根据论文【20】中提出的思想对约化子图进行同构测试, 然后通过共享保证其唯一性。如果可以在已经生成的约化子图中可以同构(包括相同)子图, 则将对应的判定图分枝指向已生成约化子图对应的结点, 同时删去新得到的约化子图; 否则生成新的判定图结点, 保存该约化子图;

Step6: 是否还有符号未处理? 若是, 则转向执行 **Step2**; 否则, 算法执行完毕。

在使用图约化算法构建 SDD 的过程中, 我们还需要用到生成项符号确定算法逐步计算生成项的符号。该算法采用二维数组来记录左、右子图中每条边的两个端点, 设第一维 $e(1)$ 、第二维 $e(2)$ 分别存储边 e 的两个端点的结点号, 当 $e(1) < e(2)$ 时称该边的方向是正向的; 否则, 为反向的。生成项符号确定算法如下:

Step1: 初始化: $sign = 1$ 。

Step2: 若移除一条边, 直接将该边从表示约化子图的数组中删去, $sign$ 保持不变。若选择一条边(假设该边为 (v_1, v_2) , 其中 $v_1 < v_2$, 即改变为正向), 现将该边从表示约化子图的数组中删去, 然后将数组中所有边结点为 v_2 的点改成 v_1 。考察仍保存在数组中的结点, 计算结点号小于 v_2 的结点数目, 如果该数为奇数, 则 $sign *= -1$ 。

Step3: 如果所选择的边是反向的, 则 $sign *= -1$ 。

Step4: 如果选择的是 VS, 且 VS 与其它类型边成对出现, 则 $sign *= -1$ 。

Step5: 将 $sign$ 关联到相应的 SDD 结点分枝上。

由此, 我们可以得到一个有向无环图, 他由一个根结点、两个分别为 0 和 1 的终结点、不同非终结点的 0-分枝和 1-分枝以及分枝上附带的生成项符号组成。选择该图从根结点到终结点 1 的所有路径, 即可获得电路传输函数的所有生成项, 其中, 每个生成项对应一条路径上所有电路符号及分枝符号的乘积。

2.2 传输函数符号化灵敏度分析

模拟电路的灵敏度是指微小的电路参数值的变动对性能尺度的数学意义上的度量,符号化灵敏度信息的提取可以弥补数值仿真工具不可洞察参数改变对电路性能影响的缺点,在优化电路时更加准确方便的获取良好的系统性能。

假设电路传输函数为 $H(s)$, 则他相对于某一个电路参数 p (p 为电容、电感、电阻或受控源的控制系数) 的归一化灵敏度定义为:

$$Sens(H(s), p) := \frac{p}{H(s)} \frac{\partial H(s)}{\partial p} = \frac{\partial \ln H(s)}{\partial \ln p} \quad (2-4)$$

绝对灵敏度为:

$$abs_Sens(H(s), p) = \frac{\partial H(s)}{\partial p} \quad (2-5)$$

另一方面, 电路传输函数可以看成是分子多项式和分母多项式的比值, 即

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (2-6)$$

因此, 存在如下关系式:

$$Sens(H(s), p) = Sens(N(s), p) - Sens(D(s), p) \quad (2-7)$$

证明如下:

$$\begin{aligned} Sens(H(s), p) &= \frac{p}{H(s)} \frac{\partial H(s)}{\partial p} = \frac{\partial \ln H(s)}{\partial \ln p} = \frac{\partial \ln(N(s)/D(s))}{\partial \ln p} \\ &= \frac{\partial \ln N(s) - \partial \ln D(s)}{\partial \ln p} = Sens(N(s), p) - Sens(D(s), p) \end{aligned} \quad (2-8)$$

可以看出, 求传输函数对某个电路元件的归一化灵敏度可以转化为分别求分子、分母相对于电路元件的一阶偏导数。在 SDD 中, 由于根结点的左右分枝分别代表了电路传输函数的分子、分母多项式, 所以对分子分母求偏导数, 即是对根结点的 1-分枝和 0-分枝分别进行相应的图操作。

从前文的描述中可以知道, 分子、分母多项式是通过遍历 SDD 所有终结点为 1 的路径得到的一系列生成项的和, 同一电路符号 p 在一个生成项中最多出现一次, 因此, 以分子多项式为例, 可以表示为以下形式:

$$N(s) = f(s)p + g(s) \quad (2-9)$$

其中, 多项式 $f(s)$ 和 $g(s)$ 均不包含变量 p 。

因此, $N(s)$ 对 p 求一阶导数, 有

$$\frac{\partial N(s)}{\partial p} = f(s) \quad (2-10)$$

即，不包含变量 p 的生成项求导后为 0，包含变量 p 的生成项求导后变量 p 不再出现在生成项中。对应于 SDD 上的图操作，则首先是判断所有的终结点为 1 的路径是否包含电路元件 p ，删除所有的不包含电路元件 p 的 1-路径上的结点，并且将所有删除后浮空的边指向终结点 0；然后将电路元件 p 的符号和数值全部修改为 1。至此，根结点的左结点和右结点可以分别表示分子多项式 $N(s)$ 和分母多项式 $D(s)$ 关于电路元件 p 的符号化形式的一阶偏导数，进而可以通过式(2-4)和式(2-7)符号化提取电路传输函数的灵敏度。

值得注意的是，由于电路参数在 SDD 中均以导纳的形式出现，因此，求导后还需要根据电路元件类型对应的修正因子进行计算，如对电阻 R 求偏导数，必须乘以电阻修正因子 $-1/R^2$ 。

此外，进行求导操作后的 SDD 因为删除了不包含元件 p 的路径上的结点，表现形式更加简单，并不会额外增加空间的复杂度。

2.3 一个例子

下面，我们用一个简单的例子说明 GRASS 是怎样分析电路拓扑结构、对电路有向图进行图约化算法得到 SDD，以及如何从电路的 SDD 中对电路传输函数的交流灵敏度进行符号化提取。

图 2-3 为一个简单的低通滤波器。

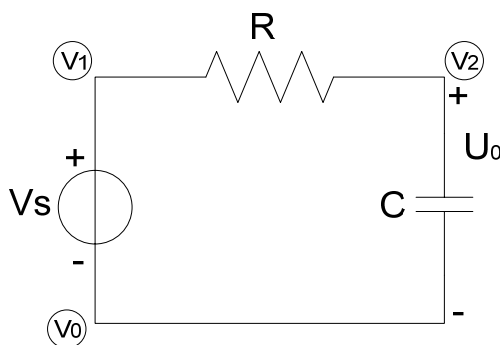


图 2-3 低通滤波器电路

Fig.2-3 A Low-Pass Filter

根据 2.2.2 节中的有向图构建规则，将上述电路的输入输出建模为电压控制电压源 VCVS，输出控制输入的增益为 X ，则其对应的电路有向图如图 2-4 所示。

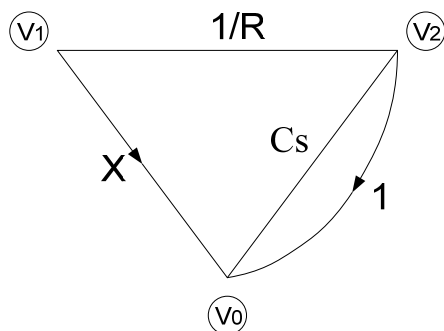


图 2-4 低通滤波器的电路有向图

Fig.2-4 Direction Graph for Low-Pass Filter

枚举该有向图的有效生成树，可以得到一个有效生成树对。由于有效生成树对中的左生成树不能包含 VC 和 NU 边，右生成树不能包含 CS 和 NO 边，所以图 2-4 对应的有效生成树对如图 2-5 所示。

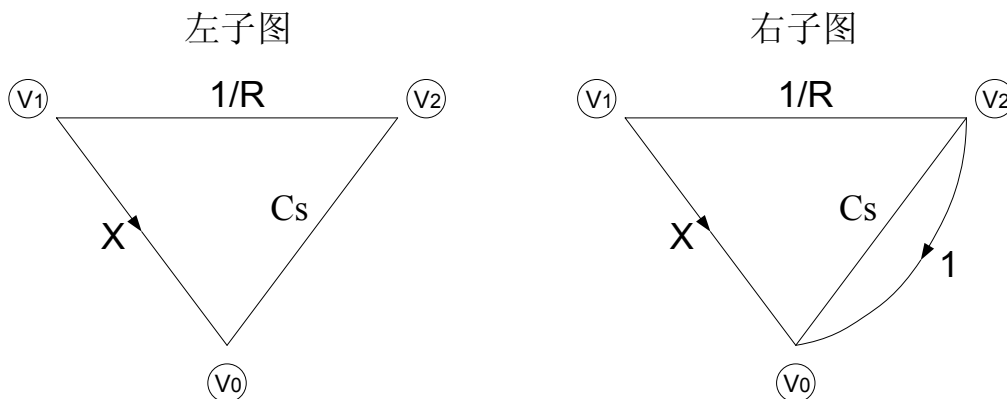


图 2-5 低通滤波器的有效生成树对

Fig.2-5 Admissible Tree Pair

按照有向图约化算法，在对由有向图拆分而来的一对有效生成树对进行图约化前，需要确定电路元件的处理顺序。在上述低通滤波器电路中，存在电阻 R、电容 C 和代表输入输出受控源 VCVS 的 X。为了方便计算，我们总是首先处理输入输出受控源，所以，设定的电路符号操作顺序为 X->R->C。

首先处理符号 X，X 对应输入输出受控源 VCVS。

根据表 2-1，选取 X，则在左图中选取 VS 边，在右图中先移去 VS 边再选取 VC 边，从而得到位于根结点左侧的新结点，该新结点以下一个等待处理的符号 R 的导纳形式表示。用实线箭头从结点 X 出发的指向这个新结点，并根据生成项符号确定该算法为这条实线边关联上一个符号，设为 sign，其初始值为 1。

表 2-2 和表 2-3 分别为表示上述电路左右子图的二维数组。

表 2-2 左子图的二维数组表示

表 2-3 右子图的二维数组表示

	VS	1/R	Cs
e(1)	V1	V1	V2
e(2)	V0	V2	V0

	Vs	1/R	Cs	VC
e(1)	V1	V1	V2	V2
e(2)	V0	V2	V0	V0

对于左子图，选择 VS 边，则将该边从左子图的二维数组中删去，数组剩下部分中的结点 V1 全部用 V0 替代；对于右子图，移去 VS 再选择 VC，则将 VS 边和 VC 从右子图的二维数组中移去后，剩下部分的节点 V2 全部用 V0 替代。得到的新的左右子图的二维数组如表 2-4 和表 2-5 所示。

考察左右约化子图，表 2-4 中结点号小于 V1 的结点仅有 V0，表 2-5 中小于 V2 的结点为 V0 和 V1，因此，数组中结点号小于被移除结点号的总结点个数是 3，为奇数， $\text{sign}=-1$ ；左子图中选择的边 VS 和右子图中选择的边 VC 均为反向边，所以 sign 要乘以两个 -1；又，VS 与 VC 边成对出现，所以最终 $\text{sign}=(-1)^4=1$ 。

表 2-4 左约化子图的二维数组

	1/R	Cs
e(1)	V0	V2
e(2)	V2	V0

表 2-5 右约化子图的二维数组

	1/R	Cs
e(1)	V1	V0
e(2)	V0	V0

排除 X，在左图中选取 VS 边、在右图中选取 VS 边的同时移去 VC 边，从而得到位于根结点右侧的新结点，同样以符号 R 的导纳形式表示，该结点表示符号 X 不会出现在最终的生成项中，用带箭头的虚线从结点 X 出发指向新结点。

处理完 X 后，再依次处理 R 和 C。若发现左、右子图在某一结点约化后都得到了其生成树，则将该结点分枝指向指向终结点 1，如图 2-6 中 R 结点的 1-分枝；若左、右子图中的某一个约化后生成了孤立的结点，表示无法得到生成树，则将该结点分枝指向终结点 0，如图 2-6 中 C 结点的 0-分枝。

图 2-6 描述了电路由有效生成树对通过约化得到 SDD 的过程。

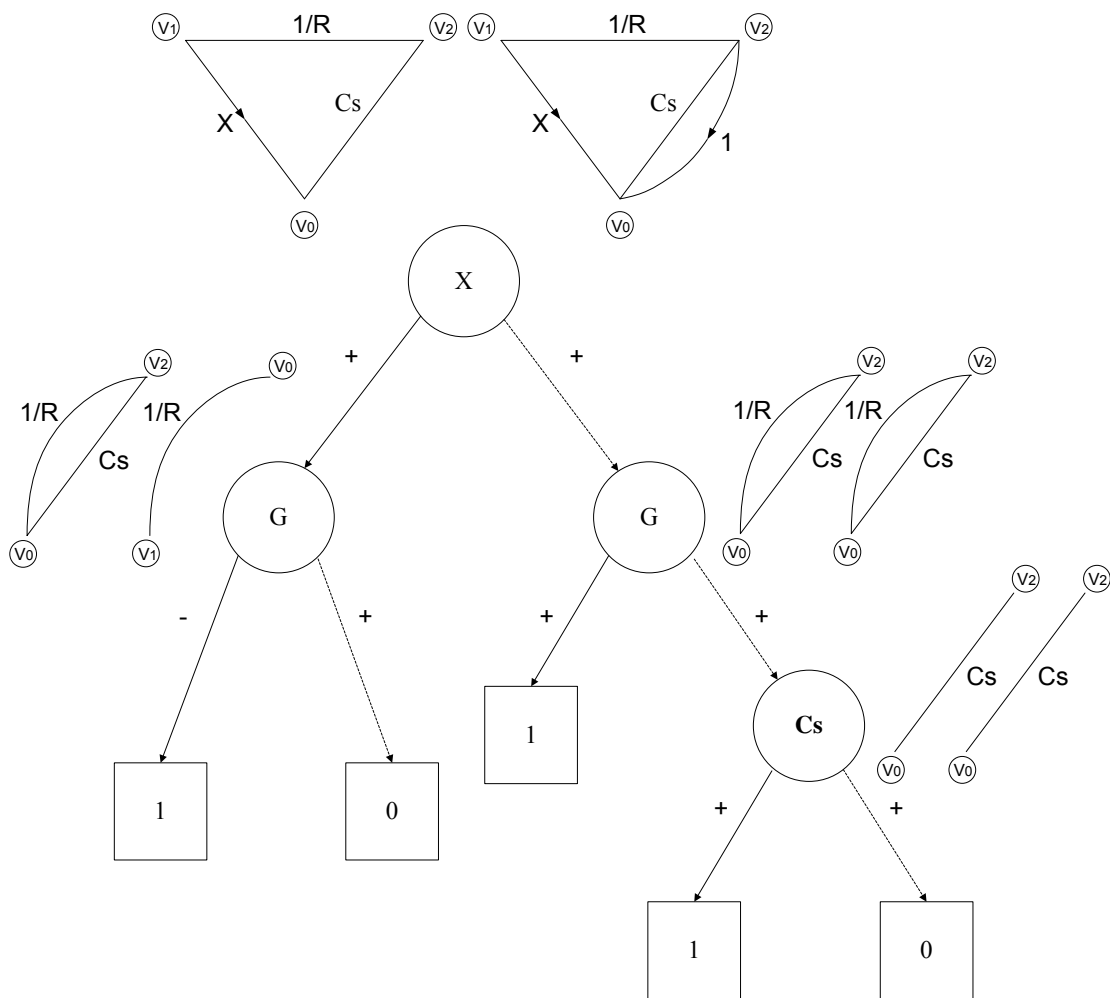


图 2-6 有向图约化过程

Fig.2-6 Construction of SDD by Graph Reduction Manipulation

通过对约化子图进行同构测试，共享约化子图中的同构子图，图 2-6 可以生成如下形式的 SDD。

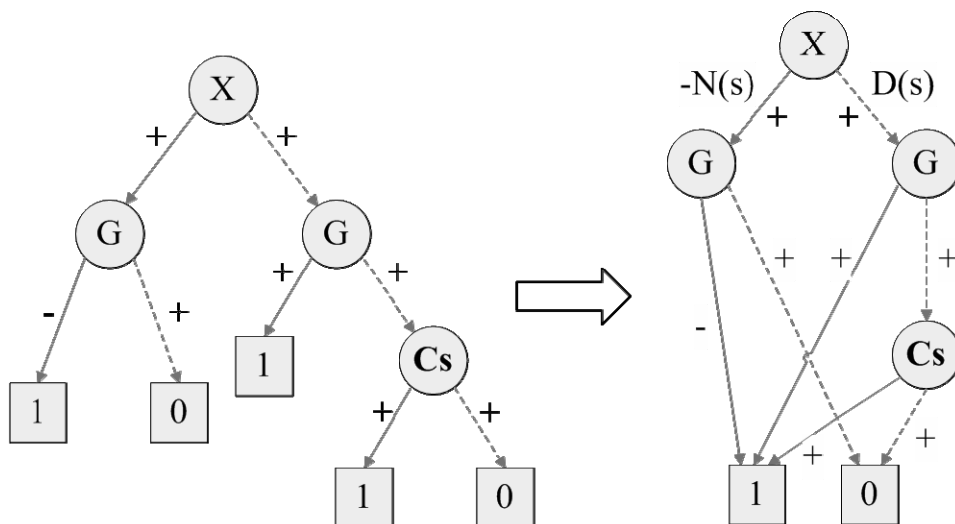


图 2-7 符号化判定图 SDD

Fig.2-7 Symbolic Decision Diagram

遍历上图所示的 SDD 所有从根结点到终结点 1 的路径,可以得到图 2-3 所示的低通滤波器传输函数的三个生成项: $-XG$ 、 G 和 Cs , 因为所有生成项之和为 0, 则有

$$-XG + G + Cs = 0 \tag{2-11}$$

因此, 电路的传输函数为:

$$H(s) = \frac{1}{X} = \frac{G}{G + Cs} = \frac{1}{1 + RCs} \tag{2-12}$$

其中, 分子多项式 $N(s)=G$, 分母多项式 $D(s)=G+Cs$ 。

欲求元件 R 对电路传输函数的符号化敏感度, 即分别对 SDD 根结点的左、右结点引导的约化子图进行图操作。

分子多项式 $N(s)$ 对 G 求导后为 1, 则将 X 的左结点 G 的电路符号改为 1, 其 1-分枝直接指向终结点 1, 0-分枝直接指向终结点 0。

分母多项式 $D(s)$ 对 G 求导后也为 1, 不仅要将 X 的右结点 G 的电路符号改为 1, 令其 1-分枝指向终结点 1, 还必须删除 0-分枝指向的结点 Cs , 使其直接指向终结点 0。

因此, 求导后的 SDD 在图上的表现形式为:

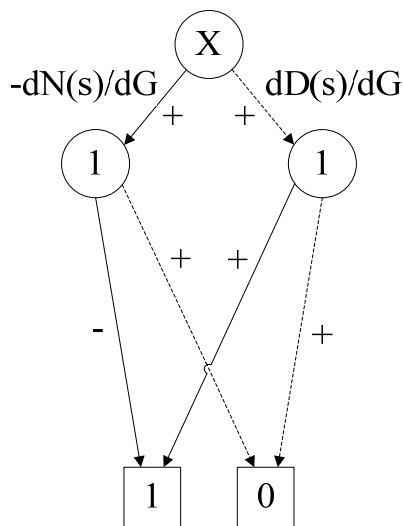


图 2-8 求导后的 SDD

Fig.2-8 Symbolic Decision Diagram for Sensitivity Analysis

遍历求导后的 SDD, 我们可以得到电路传输函数分子、分母多项式对电阻 R 的导纳 G 求导后的表达式均为 1, 根据式(2-7)可知, 电路传输函数关于电阻元件 R 的归一化灵敏度为:

$$\begin{aligned}
Sens(H(s), R) &= Sens(N(s), R) - Sens(D(s), R) \\
&= \frac{R}{N(s)} \frac{\partial N(s)}{\partial R} - \frac{R}{D(s)} \frac{\partial D(s)}{\partial R} = \frac{G}{D(s)} \frac{\partial D(s)}{\partial G} - \frac{G}{N(s)} \frac{\partial N(s)}{\partial G} \quad (2-13) \\
&= \frac{G}{G} \cdot 1 - \frac{G}{G+Cs} \cdot 1 = -\frac{Cs}{G+Cs} = -\frac{RCs}{1+RCs}
\end{aligned}$$

若根据归一化灵敏度的定义，通过式(2-12)直接求电路传输函数对电阻 R 的归一化灵敏度，有

$$Sens(H(s), R) = R(1+RCs) \frac{\partial \frac{1}{1+RCs}}{\partial R} = -\frac{RCs}{1+RCs} \quad (2-13)$$

从而，验证了通过修改电路 SDD 进行传输函数符号化灵敏度分析的正确性。更为重要的是，灵敏度分析后的符号化判定图只可能在初始判定图的基础上有所简化，不会引入任何新的结点，避免了由于求导计算导致的空间复杂度的增加，这一特点对于提高符号化仿真器分析大规模模拟电路的能力有着重大意义。

2.4 本章小结

本章简单介绍了符号化仿真器 GRASS 的原理，该仿真器基于一个全新的拓扑网络分析理论，通过电路子图约化的算法在内存中构建二分判定图用以存储电路符号化表达式的所有有效生成项，然后通过对判定图的相关操作得到所需的符号化分析结果与相关数值结果。

本章还论述了基于 GRASS 的符号化交流小信号灵敏度分析方法，通过对电路符号化判定图进行相关图操作，可以方便的提取出电路传输函数关于某个电路元件的符号化灵敏度，从而为电路的设计和性能优化提供有利信息。

本章的最后，采用了一个简单的例子来说明上述这些经过严格数学证明推导的算法和原理。

第三章 符号化带宽及相位裕度优化方法

随着电路规模和复杂度的不断增加，对电路性能的仿真和验证逐渐占据了设计过程中的大量时间和人力资源。尤其在模拟电路的设计过程中，工艺发展到深亚微米级以后，电路某些参数的微小变动都会直接影响到系统的稳定性。一方面，传统的数值仿真工具无法避免数值计算过程中的舍入误差以及计算收敛性问题，设计的可靠性和设计精度都受到了一定的限制；另一方面，为了能够得到优良的系统性能，设计过程中往往需要不断修改电路元件的参数，针对参数的改变进行大量重复的仿真。

因此，以提高基于电路参数改变而获得电路目标性能的效率为目的，我们试图以第二章讲述的符号化仿真器 GRASS 的相关理论为基础，探索一种能够通过快速改变电路参数以优化电路性能的方法。

3.1 符号化判定图的 s 展开

设 GRASS 分析如图 3-1 所示电路时的符号处理顺序为 $X < G1 < G2 < C2 < C1$ ，可以得到如图 3-2 的符号化判定图，这里，我们暂且忽略 SDD 中各条边的符号。

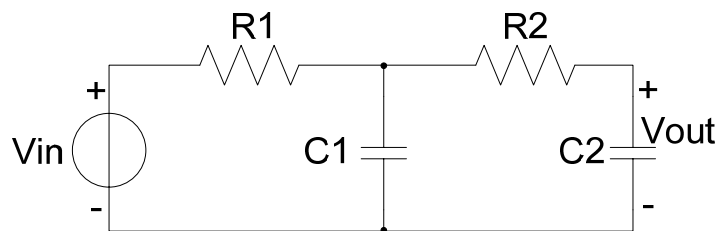


图 3-1 s 展开示例电路

Fig.3-1 An Circuit Example for s-Expand

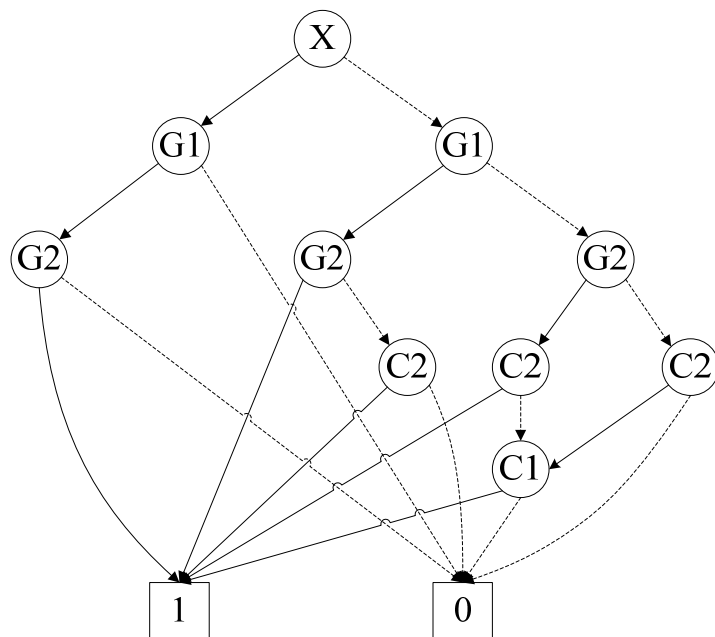


图 3-2 图 3-1 电路的 SDD

Fig.3-2 SDD for Fig.3-1

对这个符号化判定图进行分析，可以得到如下形式的电路传输函数：

$$H(s) = \frac{G_1 G_2}{G_1(G_2 + C_2 s) + G_2(C_2 s + C_1 s) + C_1 C_2 s^2} \quad (3-1)$$

这种变量以套嵌形式表现的数学表达式，称为顺次表达式 (Sequence-of-expression, SOE) 【21】，一般很难揭示电路的特性。为此，我们将嵌套在 SOE 中的子表达式进行展开，以关于频率变量 s 的多项式形式出现：

$$H(s) = \frac{G_1 G_2}{C_1 C_2 s^2 + (G_1 C_2 + G_2 C_1 + G_2 C_2) s + G_1 G_2} \quad (3-2)$$

称如式(3-2)的表达式为电路传输函数的 s 展开形式。与 SOE 形式的传输函数相比较， s 展开后能够更加方便的对电路关键参数进行分析。

假设 s 展开后电路传输函数的通用表达式为

$$H(s) = \frac{\sum N[i] s^i}{\sum D[j] s^j} \quad (3-3)$$

其中， $N[i]$ 和 $D[i]$ 分别表示符号化传输函数分子分母多项式中对应第 i 阶变量 s 的系数。则，对于式(2-2)，有

$$\begin{aligned}
 N[0] &= G_1 G_2 \\
 D[0] &= G_1 G_2 \\
 D[1] &= G_1 C_2 + G_2 C_1 + G_2 C_2 \\
 D[2] &= C_1 C_2
 \end{aligned}
 \tag{3-4}$$

电路传输函数的 s 展开不必改变 GRASS 原有的电路分析方法，只需在使用图约化算法得到电路的符号化判定图后，将单个根结点的 SDD 展开为一个具有多个根节点的 SDD，其每个根节点代表一个表示多项式系数的判定图并且共享它们的子图，如图 3-3 所示。

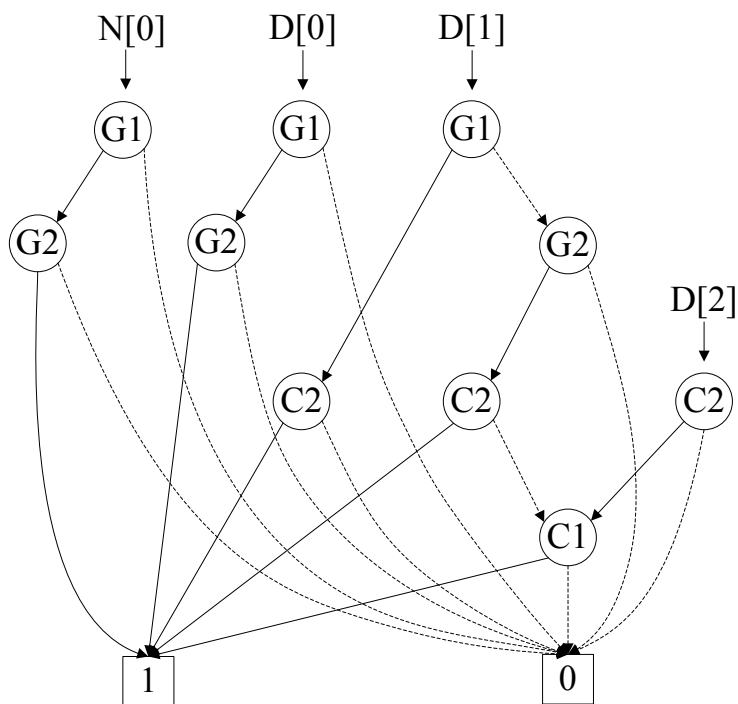


图 3-3 图 3-1 电路的 s 展开 SDD

Fig.3-3 s -SDD for Fig.3-1

在 GRASS 构建电路符号化判定图的过程中，为了节约数据存储空间，对所有的并联元件都做了预处理，将并联元件都简化为一个统一的符号。因此，在进行 s 展开前，需要对这些并联预处理的电路符号进行分离操作。经过分离操作后，并联元件通过各自的 0-分枝连接，最后一个并联结点的 0-分枝指向原来的子结点，而所有的 1-分枝都共享原来的子图。这样，SDD 中将不存在表示并联元件的符号，每个结点都表示单独的电路器件。

值得注意的是，为了能够正确判断传输函数分子分母多项式中系数对应的阶数，要考虑到电感和电容因为以导纳的形式出现在 SDD 中，因此分别引入了 s 的 -1 次方和 1 次方，而电阻未引入频率变量 s ，所以，对应不同的并联器件类型，需要使用相应的 s 阶系数的参数参与运算。

符号化判定图进行 s 展开后，对变量 s 阶数相同的多个多项式进行了整合，

一方面，当需要重新计算与频域变量 s 有关的值时，不必再通过递归的方法进行求值，只用针对 s 的改变进行代数运算即可，大大提高了电路的分析效率；另一方面，以 s 展开形式表现的电路传输函数直观的给出了与 s 阶数对应的多项式系数，这一特点为揭示电路特性，尤其是在近似分析和零极点提取等方面，提供了巨大的便利。

3.2 符号化带宽优化方法

在对电路性能进行考察的各项指标中，零极点提取始终是设计者们颇为关注的焦点。然而，传统的由传输函数求解零极点的方法继承了计算复杂度随电路规模的增大呈现指数增长的特点，通过符号化分析得到的传输函数的生成项数目之庞大更是进一步使得分析的时间和空间复杂度剧增，因此，精确的符号化仿真工具对大规模模拟集成电路的分析能力十分有限。

从本质上讲，零极点提取就是求解电路传输函数分子或者分母一元高次多项式的根。这是一个由来已久的数学问题，但至今为止人们只对四阶以下的多项式解法有所掌握【22】，对高阶方程还没能找到一个系统的理论求解方法。目前，常用的几种重要的零极点提取方法主要有根分离技术、牛顿迭代法、基于特征值的方法等等【23】。由于完整的电路传输函数的复杂度完全依赖于电路规模，因此，上述零极点求解方法往往需要对传输函数进行符号化近似分析，即，根据对相位和幅度的贡献对传输函数中的各生成项进行分类，如果满足一定的误差规则，则将影响较小的项从传输函数表达式中删除。然而，为了保持幅度和相位的变化控制在合理范围内，根轨迹在简化过程中往往会发生巨大变化，更有甚者，某些零/极点对会在简化过程中消失，大大影响分析精度和可靠性。

我们似乎在处理大规模模拟集成电路的零极点问题上遭遇了一个不可逾越的瓶颈，庆幸的是，GRASS 基于全新的拓扑网络分析理论，通过图约化算法构建二分判定图用以存储符号化电路传输函数。这种特殊的电路分析方法不仅可以通过对判定图的相关操作得到所需的符号化分析结果，而且能方便的进行电路元件交流敏感度分析，他直接利用电路拓扑进行符号化分析的特点，使得电路设计者根据设计需求对电路关键参数的进行符号化分析和自动优化成为可能。

3.2.1 系统带宽与电路主极点

多数模拟电路设计者在使用零极点对某些复杂的电路性能进行评估时，往往只需要一部分特定点的分析数据，没有必要对所有零极点都进行计算。

假设通过符号化仿真器 GRASS 得到如下电路传输函数：

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_q s^q}{a_0 + a_1s + \dots + a_p s^p} \quad (3-5)$$

其中， $a_0 \sim a_p$ 、 $b_0 \sim b_q$ 分别表示传输函数分母、分子多项式中变量 s 的系数。

当分母多项式存在根 p_d 满足条件 $|p_d| \ll |p_k|$ 时 (p_k 为传输函数其它极点, $k \neq d$)，则称 p_d 为电路的主极点。若 p_d 为实数，称 p_d 为实主极点，如图 3-4 中的 p_r 所示；如 p_d 为虚数，则与其共轭虚数统称为复主极点，如图 3-4 中的 p_j 及其共轭复数。

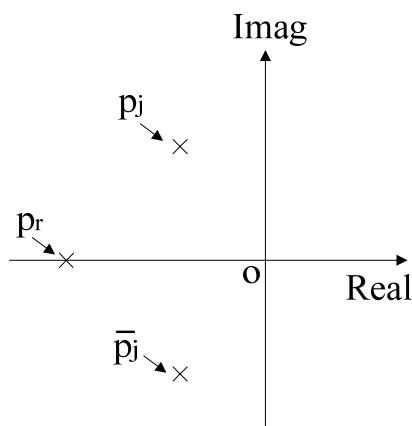


图 3-4 实主极点与复主极点

Fig.3-4 Real Dominant Pole and Imaginary Dominant Pole

本文将以实主极点为分析对象进行算法介绍，文中所有主极点均特指实主极点，复主极点分析方法可以类似地导出。

在分析系统带宽时，电路频响曲线中的主极点对带宽的影响起主导作用，其在波特图上表现为增益开始下降的那一个拐点，且其在电路所有极点中频率最低。

比如，某放大器电路在高频区的电压增益为：

$$A(s) = \frac{K}{\left(1 + \frac{s}{400}\right) \left(1 + \frac{s}{9.6 \times 10^6}\right)} \quad (3-6)$$

则其幅频特性为

$$|A(j\omega)| = 20 \lg K - 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{j\omega}{400}\right)^2} - 20 \lg \sqrt{1 + \left(\frac{j\omega}{9.6 \times 10^6}\right)^2} \quad (3-7)$$

可以看出，极点 $|-400| \ll |-9.6 \times 10^6|$ ，主极点 $s = -400$ 对系统带宽的影响起主导作用。因此，电路主极点可以很好的刻画出电路的带宽特性，也是模拟电路设计师常用的一个设计参数。

3.2.2 符号化主极点提取

假设通过符号化仿真器得到如下的电路传输函数:

$$H(s) = \frac{N(s, b_0, b_1, \dots, b_q)}{D(s, a_0, a_1, \dots, a_p)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_q s^q}{a_0 + a_1 s + \dots + a_p s^p} \quad (3-8)$$

其中, $a_0 \sim a_p$ 、 $b_0 \sim b_q$ 分别表示电路传输函数分母、分子多项式中变量 s 相应阶数的系数。

当分母多项式存在根 p_d 满足条件 $|p_d| \ll |p_k|$ 时 (p_k 为传输函数其它极点, 且 $k \neq d$), 则传输函数可以由一阶表达式近似的描述:

$$H(s) \approx F(s) = \frac{k}{s - p_d} \quad (3-9)$$

其中, 式(3-9)分母中的变量 p_d 即表示传输函数的主极点。

将式(3-8)进行泰勒展开, 得到:

$$H(s) = m_0 + m_1 s + m_2 s^2 + \dots \quad (3-10)$$

将式(3-9)进行泰勒展开, 得到:

$$F(s) = -\left(\frac{k}{p_d} + \frac{k}{p_d^2} s + \frac{k}{p_d^3} s^2 + \dots\right) \quad (3-11)$$

比较式(3-10)和式(3-11)中的两个泰勒展开表达式, 可以得到如下方程组:

$$\begin{cases} m_0 = -\frac{k_1}{p_d} \\ m_1 = -\frac{k_1}{p_d^2} \\ \dots \\ m_{r-1} = -\frac{k_1}{p_d^r} \end{cases} \quad (3-12)$$

其中, m_p 是电路传输函数 p 阶矩, 可以由传输函数分子和分母多项式的系数表述为:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0 = \frac{b_0}{a_0} \\ m_1 = \frac{b_1 - m_0 a_1}{a_0} \\ m_2 = \frac{b_2 - m_0 a_2 - m_1 a_1}{a_0} \\ \dots \\ m_{r-1} = \frac{b_{r-1} - m_0 a_{r-1} - m_1 a_{r-2} - \dots - m_{r-2} a_1}{a_0} \end{array} \right. \quad (3-13)$$

因此，由式(3-12)和式(3-13)，得到电路主极点的表达式为：

$$p_d = \frac{m_0}{m_1} = \frac{a_0 b_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0} \quad (3-14)$$

当传输函数分子、分母多项式均不包含常数项时，电路必有同时为 0 的零点和极点。观察式(3-14)发现，在某些电路中，传输函数分子、分母多项式的系数可能使得式(3-14)的分母为 0，则根据方程组(3-12)，主极点与电路任意阶矩的关系表达式为：

$$p_d = \frac{m_0}{m_1} = \frac{m_1}{m_2} = \dots = \frac{m_r}{m_{r+1}} \quad (3-15)$$

因而，存在某个 r 和 n ，使得：

$$p_d = -\sqrt{\frac{m_{r+2}}{m_r}} = \sqrt[3]{\frac{m_{r+3}}{m_r}} = \dots = (-1)^{n+1} \sqrt[n]{\frac{m_{r+n}}{m_r}} \quad (3-16)$$

所以，只要电路主极点存在，就能通过式(3-16)对主极点进行求解，我们称这种主极点分析方法为矩匹配法。

对电路主极点进行符号化分析，首先要通过 GRASS 仿真器对待分析电路执行图约化算法，根据电路元件的拓扑结构构建相应的 s 展开符号化判定图，从中提取相关的分子、分母多项式系数，然后根据求解表达式(3-16)进行求解。

如果改变某一电路参数，欲得到主极点在该参数变化时一系列的值，则只需遍历已经构建好的 s 展开 SDD，对参数改变后的新的与主极点有关的多项式系数进行计算，即可以得到主极点与该电路参数相关的变化曲线。

因此，模拟电路设计者能够直观地观察到主极点的根轨迹，清楚地了解电路元件在不同的取值时对应的主极点位置，为确定系统带宽等有关电路特性提供可靠有效的依据；也可以将主极点分析应用到电路优化过程中，通过调整电路参数达到优化带宽的目的。

3.2.3 主极点的符号化灵敏度

灵敏度是指电路参数值的微小变化对电路性能的影响程度在数学意义上的描述。模拟电路的灵敏度分析对关键设计指标的优化起着至关重要的作用。例如，通过主极点灵敏度分析对系统带宽进行优化，可以大大简化分析过程，直接建立设计者直觉与电路参数的联系，提高优化效率和设计者的工作效率。

灵敏度计算能够很好的体现符号化分析方法的优点，在一定范围内，电路性能关于任意一个电路参数灵敏度都能够得到精确的表示，弥补了数值分析工具中不可洞察参数变化的缺点。GRASS 已经具备对电路传输函数进行灵敏度计算的功能，我们可以结合灵敏度的理论基础和主极点的相关信息，对主极点关于电路参数的灵敏度进行求解。

从上一节的表述中我们已经知道，假设 $a_0b_1 - a_1b_0 \neq 0$ ，则电路主极点的表达式可以近似的表示成式(3-14)的形式，现将式(3-14)重写为如下形式：

$$p_d(x) = \frac{m_0}{m_1} = \frac{a_0b_0}{a_0b_1 - a_1b_0} \quad (3-17)$$

这里， $p_d(x)$ 表示电路的主极点表达式，它由电路传输函数分子多项式和分母多项式的部分系数组成，因此与传输函数变量 s 无关，仅是一个与某电路参数 x 有关的函数。

定义主极点相对于电路参数 x (x 为电容、电感、电阻或受控源的控制系数)的归一化灵敏度为：

$$Sens(p_d(x), x) = \frac{x}{p_d(x)} \frac{\partial p_d(x)}{\partial x} = \frac{\partial \ln p_d(x)}{\partial \ln x} \quad (3-18)$$

对应的绝对灵敏度为：

$$abs_Sens(p_d(x), x) = \frac{\partial p_d(x)}{\partial x} \quad (3-19)$$

因为电路传输函数的归一化灵敏度存在如下关系：

$$\begin{aligned} Sens(H(s, x), x) &= Sens\left(\frac{N(s, x)}{D(s, x)}, x\right) \\ &= \left(\frac{x}{N(s, x)} \frac{\partial N(s, x)}{\partial x} - \frac{x}{D(s, x)} \frac{\partial D(s, x)}{\partial x}\right) \\ &= Sens(N(s, x), x) - Sens(D(s, x), x) \end{aligned} \quad (3-20)$$

将式(3-17)代入式(3-18)，得到主极点的归一化灵敏度公式可以表示为：

$$\begin{aligned}
 \text{Sens}(p_d(x), x) &= \text{Sens}\left(\frac{a_0 b_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0}, x\right) \\
 &= \text{Sens}(a_0, x) + \text{Sens}(b_0, x) - \text{Sens}(a_0 b_1 - a_1 b_0, x) \\
 &= \frac{x}{a_0} \frac{\partial a_0}{\partial x} + \frac{x}{b_0} \frac{\partial b_0}{\partial x} - \frac{x}{a_0 b_1 - a_1 b_0} \left(\frac{\partial a_0}{\partial x} b_1 + a_0 \frac{\partial b_1}{\partial x} - \frac{\partial a_1}{\partial x} b_0 - a_1 \frac{\partial b_0}{\partial x} \right) \\
 &= \frac{x}{a_0 b_1 - a_1 b_0} \left\{ \frac{b_0}{a_0} \left(a_0 \frac{\partial a_1}{\partial x} - a_1 \frac{\partial a_0}{\partial x} \right) - \frac{a_0}{b_0} \left(b_0 \frac{\partial b_1}{\partial x} - b_1 \frac{\partial b_0}{\partial x} \right) \right\} \quad (3-21)
 \end{aligned}$$

将式(3-17)代入式(3-19)，或者将表达式(3-21)乘以系数 $\frac{a_0 b_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0} \frac{1}{x}$ ，可以得

到主极点绝对灵敏度公式为：

$$\begin{aligned}
 \text{abs_Sens}(p_d(x), x) &= \text{abs_Sens}\left(\frac{a_0 b_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0}, x\right) \\
 &= \frac{x}{a_0 b_1 - a_1 b_0} \left\{ \frac{b_0}{a_0} \left(a_0 \frac{\partial a_1}{\partial x} - a_1 \frac{\partial a_0}{\partial x} \right) - \frac{a_0}{b_0} \left(b_0 \frac{\partial b_1}{\partial x} - b_1 \frac{\partial b_0}{\partial x} \right) \right\} \cdot \frac{a_0 b_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0} \frac{1}{x} \\
 &= \frac{a_0 b_0}{(a_0 b_1 - a_1 b_0)^2} \left\{ \frac{b_0}{a_0} \left(a_0 \frac{\partial a_1}{\partial x} - a_1 \frac{\partial a_0}{\partial x} \right) - \frac{a_0}{b_0} \left(b_0 \frac{\partial b_1}{\partial x} - b_1 \frac{\partial b_0}{\partial x} \right) \right\} \quad (3-22)
 \end{aligned}$$

从表达式(3-21)和表达式(3-22)中可以看出，对主极点进行灵敏度计算，首先要分别计算分子、分母多项式相关系数的一阶导数，如： $\partial a_0 / \partial x$ ， $\partial a_1 / \partial x$ ， $\partial b_0 / \partial x$ ， $\partial b_1 / \partial x$ 。

通过观察主极点表达式还可以发现，由于传输函数分子、分母多项式系数 a_0 、 a_1 、 b_0 、 b_1 与传输函数的变量 s 无关，因此，对他们相对某一电路元件进行一阶求导后，并不改变其在传输函数中的位置。如， a_0 表示传输函数 $H(s)$ 分母多项式中的常数项，对传输函数相对于电路元件 x 求一阶导后，得到的表达式中分母多项式的常数项为 $\partial a_0 / \partial x$ 。式(3-23)可以更为清楚的帮助我们理解上述关系。

$$\begin{aligned}
 \text{Sens}(H(s, x), x) &= \text{Sens}\left(\frac{N(s, x)}{D(s, x)}, x\right) \\
 &= \text{Sens}(N(s, x), x) - \text{Sens}(D(s, x), x) \\
 &= \frac{x}{N(s, x)} \frac{\partial(b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots)}{\partial x} - \frac{x}{D(s, x)} \frac{\partial(a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots)}{\partial x} \quad (3-23) \\
 &= \frac{x}{N(s, x)} \left(\frac{\partial b_0}{\partial x} + \frac{\partial b_1}{\partial x} s + \frac{\partial b_2}{\partial x} s^2 + \dots \right) - \frac{x}{D(s, x)} \left(\frac{\partial a_0}{\partial x} + \frac{\partial a_1}{\partial x} s + \frac{\partial a_2}{\partial x} s^2 + \dots \right)
 \end{aligned}$$

从而，没有必要分别对 a_0 、 a_1 、 b_0 、 b_1 求解一阶导数，只需对系统传输函数进行一次求导后进行 s 展开，就可以同时获得与主极点相关的多项式系数 $\partial a_0 / \partial x$ ，

$\partial a_1 / \partial x$, $\partial b_0 / \partial x$, $\partial b_1 / \partial x$ 。

值得注意的是, 在 GRASS 中, 除了控制参数, 其他电路元件均以导纳的形式出现在符号化表达式中。因此, 考虑到不同的元件类型以不同的形式存储, 存在以下四种情形:

(1) 当电路元件为电阻时, 其表现形式为 $1/R$, 设 $G=1/R$, 则电路主极点相对于电阻元件 R 的归一化敏感度为:

$$\begin{aligned} Sens(p_d(G), R) &= \frac{R}{p_d(G)} \frac{\partial p_d(G)}{\partial R} \\ &= -\frac{1}{p_d(G)} \frac{\partial p_d(G)}{R(-\frac{1}{R^2})\partial R} = -\frac{\partial \ln p_d(G)}{\partial \ln G} = -Sens(p_d(G), G) \end{aligned} \quad (3-24)$$

(2) 当电路元件为电容时, 表现形式为 Cs , 则电路主极点相对于电容元件 C 的归一化敏感度为:

$$Sens(p_d(Cs), C) = \frac{C}{p_d(Cs)} \frac{\partial p_d(Cs)}{\partial C} = \frac{Cs}{p_d(Cs)} \frac{\partial p_d(Cs)}{\partial Cs} = Sens(p_d(Cs), Cs) \quad (3-25)$$

(3) 当电路元件为电感时, 表现形式为 $1/Ls$, 则电路主极点相对于电感元件 L 的归一化敏感度为:

$$\begin{aligned} Sens(p_d(\frac{1}{Ls}), L) &= \frac{L}{p_d(\frac{1}{Ls})} \frac{\partial p_d(\frac{1}{Ls})}{\partial L} \\ &= \frac{Ls}{p_d(\frac{1}{Ls})} \frac{\partial p_d(\frac{1}{Ls})}{\partial Ls} = -\frac{1}{p_d(\frac{1}{Ls})} \frac{\partial p_d(\frac{1}{Ls})}{Ls(-\frac{1}{(Ls)^2})\partial \frac{1}{Ls}} \\ &= -\frac{\partial \ln p_d(\frac{1}{Ls})}{\partial \ln \frac{1}{Ls}} = -Sens(p_d(\frac{1}{Ls}), \frac{1}{Ls}) \end{aligned} \quad (3-26)$$

(4) 当电路元件为受控源的控制系数时, 主极点归一化敏感度仍以式(3-21)计算。

现在, 我们仍然以图 3-1 所示电路为例, 该电路经过 GRASS 得到的如图 3-2 的符号化判定图, 式(3-4)列出了电路传输函数分子、分母多项式的系数。

对传输函数分子、分母的多项式系数, 即式(3-4), 求 $R2$ 的导纳 $G2$ 的一阶导数, 得到的表达式为:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N[0]}{\partial G_2} &= G_1 \\
 \frac{\partial D[0]}{\partial G_2} &= G_1 \\
 \frac{\partial D[1]}{\partial G_2} &= C_1 + C_2 \\
 \frac{\partial D[2]}{\partial G_2} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3-27}$$

则在对图的操作上，相当于对原 s 展开后的多个根节点的图约化判定图的每个根节点分别对 G_2 求导，并共享他们的子图，如图 1-5 所示。

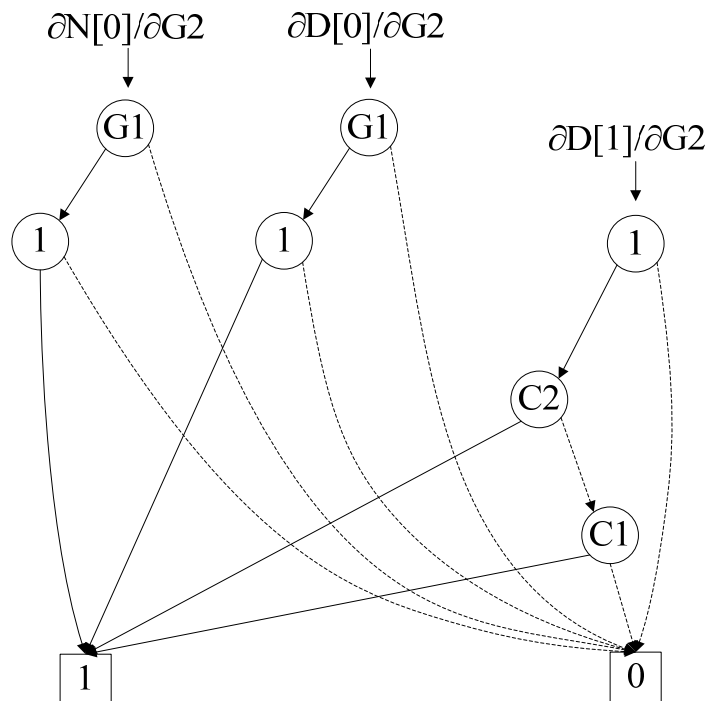


图 3-5 s 展开 SDD 关于 R_2 的一阶导数

Fig.3-5 s -SDD for Derivative with R_2

求电路传输函数关于 R_2 的归一化灵敏度，电阻元件在 GRASS 中表现为导纳 G_2 的形式，则其函数表达式可以表示为：

$$\begin{aligned}
 Sens(H(s, G_2), R_2) &= Sens(N(s, G_2), R_2) - Sens(D(s, G_2), R_2) \\
 &= Sens(D(s, G_2), G_2) - Sens(N(s, G_2), G_2) \\
 &= \frac{G_2}{D(s, G_2)} \frac{\partial D(s, G_2)}{\partial G_2} - \frac{G_2}{N(s, G_2)} \frac{\partial N(s, G_2)}{\partial G_2}
 \end{aligned}
 \tag{3-28}$$

对应的符号化判定图将会变为如下形式：

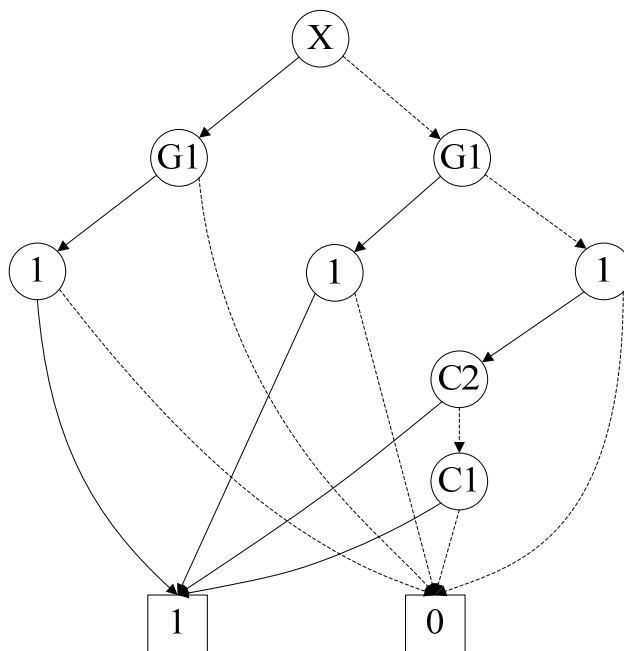


图 3-6 传输函数相对于 R2 的灵敏度 SDD

Fig.3-6 SDD for Dominant Pole Sensitivity Analysis

通过对图 3-6 的遍历可以发现，将传输函数灵敏度的 SDD 进行 s 展开，其表现形式与图 3-5 完全相同，再一次验证了对系统传输函数进行一阶求导后进行 s 展开，可以同时获得与主极点表达式相关的传输函数多项式系数关于某个电路符号的一阶导数（如 $\partial a_0 / \partial x$ 、 $\partial a_1 / \partial x$ 、 $\partial b_0 / \partial x$ 、 $\partial b_1 / \partial x$ 等）这一事实。

因此，可以将此过程归纳为一个求解主极点灵敏度的算法：

步骤一：GRASS 对所分析的电路建立相应的图约化判定图（SDD）；

步骤二：求电路的 SDD 关于某个电路元件的一阶导数，得到求导后新的 SDD；

步骤三：分别对求导前后的 SDD 进行 s 展开，得到 a_0 、 a_1 、 b_0 、 b_1 和 $\partial a_0 / \partial x$ 、 $\partial a_1 / \partial x$ 、 $\partial b_0 / \partial x$ 、 $\partial b_1 / \partial x$ 等与主极点灵敏度表达式相关的变量；

步骤四：利用主极点灵敏度求解公式进行求解，得到电路主极点相对某个电路元件在其工作点的归一化灵敏度和绝对灵敏度。

3.2.4 符号化带宽自动优化算法

根据上几节的描述，符号化仿真器 GRASS 能直接建立模拟电路主极点与电路参数之间的解析关系，导出电路主极点灵敏度的解析表示及其依赖参数的行为

倾向，从而可以根据性能指标优化电路参数。

假设希望调整电路元件 x 的参数 $value$ ，使得主极点从当前值 p_d 优化至由设计者设定的目标值 p_0 ，最简单的思想就是改变 x 参数，计算 p_d 与 p_0 的差值 f ($f = p_d - p_0$) 和 p_d 的灵敏度 $Sens(p_d, x)$ ，以主极点灵敏度符号为向导，确定 $value$ 的改变方向，使 f 趋近于 0。

首先，要确定令函数 $f=0$ 的有根区间范围 $[a, b]$ ，设有根区间的两个端点在进行以下迭代计算前的初值均为元件参数调整前的值 $value$ 。

如当 $f < 0$ ，此时 $p_d < p_0$ ，若 $Sens > 0$ ，说明 p_d 在 x 的值为 $value$ 的工作点附近随 x 单调递增，则增大 $value$ ，使得主极点 p_d 也增加，更加接近目标值 p_0 ，并将有根区间的端点 b 变为调整后的 x 值，另一端点的值保持不变；反之，若 $Sens < 0$ ，说明 p_d 在此工作点附近随 x 单调递减，则减小 x ，将有根区间的端点 a 变为调整后的 x 值。如此循环，直到 x 的某个值使得 $f > 0$ ，即满足条件 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，则确定出有根区间 $[a, b]$ 。

根据主极点当前值 p_d 与目标值 p_0 的差值 f 以及主极点灵敏度 $Sens$ 的符号关系，对电路元件 x 的参数调整存在这以下四种情况：

- (1) 若 $f > 0$ ， $Sens > 0$ ，则减小元件 x 的参数 $value$ ；
- (2) 若 $f > 0$ ， $Sens < 0$ ，则增大元件 x 的参数 $value$ ；
- (3) 若 $f < 0$ ， $Sens > 0$ ，则增大元件 x 的参数 $value$ ；
- (4) 若 $f < 0$ ， $Sens < 0$ ，则减小元件 x 的参数 $value$ 。

由零点定理【22】可知，上述循环得到的区间 $[a, b]$ 满足 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，必然存在一点使得 $f = 0$ ，即 $p_d = p_0$ 。则通过二分迭代法【23】在区间 $[a, b]$ 内进行函数 f 的根搜索，能够找到使得 f 满足误差限 ε 的 x 参数。

其中，二分法求解非线性方程的步骤如下：

步骤一：输入函数方程 f ，有根区间 $[a, b]$ ，允许误差 ε ；

步骤二：计算 $y_1 = f(a)$ ， $y_2 = f(b)$ ；

步骤三：令 $x_0 = (a+b)/2$ ， $y_0 = f(x_0)$ ；若 $|y_0| < \varepsilon$ ，则输出 x_0 ，算法结束；否则，转至步骤四；

步骤四：若 $y_0 y_1 < 0$ ，则令 $b = x_0$ ， $y_2 = y_0$ ；否则，令 $a = x_0$ ， $y_1 = y_0$ 。

因此，符号化的主极点自动优化可以归纳为以下算法：

步骤一：给出参数调整目标 p_0 及误差限 ε ；

步骤二：提取元件初值，计算此时主极点 p_d 与 p_0 之间的差值 f ；

步骤三：计算主极点灵敏度 $Sens$ ，通过判断 f 和 $Sens$ 的符号改变元件参数，直到找到区间 $[a, b]$ ，使得 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ；

步骤四：在有根区间 $[a, b]$ 内进行迭代法根搜索，使得有根区间收敛于某一点，电路元件在该点的值，即满足主极点设计指标的电路参数。

从 3.2.1 节中得知，电路频响曲线中的主极点对带宽的影响起主导作用，因此，通过调整电路元件参数来获得不同工作点下的主极点位置，即实现了以调整某个电路元件参数为手段的系统带宽优化。

3.3 符号化相位裕度优化方法

在对电路性能进行分析时，模拟电路的稳定性是重要考察指标之一。其中，相位裕度是衡量系统稳定度的一个重要参数，他是指在频率的回路增益等于 0dB 时，系统相位偏移与 -180° 之间的差值，如图 3-7 所示。如果系统的增益大于等于 0dB 时相移超过 180° ，闭环的放大电路将产生不稳定的震荡。对于一个固定的电路，相位裕度是唯一的，表明了系统距离产生自激振荡的裕量，也因此成为度量电路稳定性的标志。

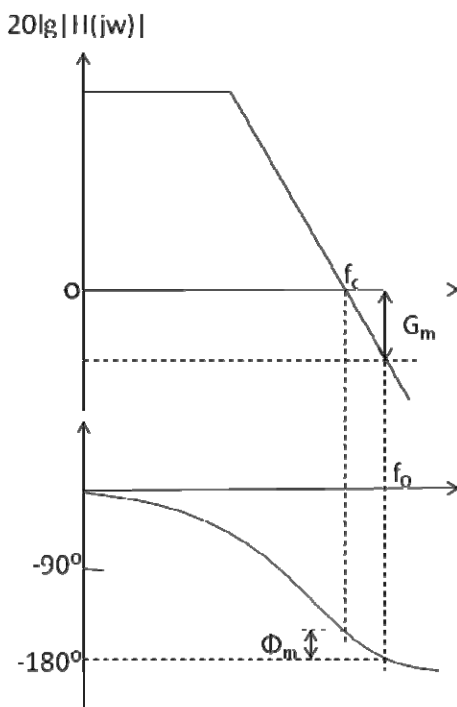


图 3-7 相位裕度

Fig.3-7 Definition for Phase Margin

在模拟电路的设计过程中，往往需要不断调整电路参数，以获得良好的系统稳定性，电路的设计周期很大程度上依赖于工程师的设计经验。探索相位裕度的自动优化方法，可以将模拟设计工程师从重复的参数调整和手动仿真和分析中解脱出来，大大提高电路设计效率和自动化程度。

3.3.1 符号化相位裕度分析

根据相位裕度的定义，假设电路传输函数为 $H(s)$ ，则

$$H(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{D(j\omega)} = |H(j\omega)| e^{j\angle\theta(\omega)} \quad (3-29)$$

当增益满足条件

$$20 \lg |H(j\omega_c)| = 20 \lg \left| \frac{N(j\omega_c)}{D(j\omega_c)} \right| = 0 \quad (3-30)$$

则传输函数在频率 ω_c 处对应的超前 -180° 的相角，即相位裕度 PM (Phase Margin)。

因此，相位裕度的求解可以归纳为对如下方程组的求解：

$$\begin{cases} f(\omega) = 20 \lg |N(j\omega)| - 20 \lg |D(j\omega)| = 0 & a) \\ PM = 180^\circ - |\theta(\omega)| & b) \end{cases} \quad (3-31)$$

从方程组(3-31)中可以看出，方程 a) 是传输函数分子多项式与分母多项式的幅值之差，它不仅继承了表达式复杂度与电路规模呈指数增长的特点，还增加了求幅值和减法的操作，这使得我们不得不再一次面对复杂的高阶多项式求根问题。所幸的是，由于相位裕度的唯一性，方程 a) 在频率上仅存在一个实根，这个信息为我们打开了一扇门，可以通过数值分析的方法，对相位裕度 PM 进行符号化分析。

求解方程组(3-31)的方程 a)，即对一个非线性方程求根，常用方法主要有二分法、线性插值法、斯蒂芬森迭代法、牛顿迭代法【23】等，其中，牛顿迭代法的应用非常广泛，一系列基于牛顿迭代法的改进方法已经可以解决大多数非线性方程的求解问题。

牛顿法实质上是一种线性化方法，其基本思想是将非线性方程逐步归结为某种线性方程来求解。假设已知方程 $f(x)=0$ 有近似根 x_k (假定 $f'(x_k) \neq 0$)，将函数 $f(x)$ 在点 x_k 展开，有

$$f(x) \approx f(x_k) + f'(x_k)(x - x_k) \quad (3-32)$$

于是，方程 $f(x)=0$ 可近似地表示为

$$f(x_k) + f'(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0 \quad (3-33)$$

记线性方程(3-33)的根为 x_{k+1} ，则

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (3-34)$$

表达式(3-34)即牛顿迭代法的表示公式。

牛顿法求方程的根需要两个输入值，一个是求值精度，一个是迭代的初始值。其优点是收敛速度快，可以很快得到求值结果；缺点一是每步迭代都必须计算 $f'(x_k)$ ，计算量较大且有时候 $f'(x_k)$ 的计算较困难，二是初始近似 x_0 只在真正的根 x^* 附近才能保证收敛，如果给定了不合适的初值 x_0 ，可能导致计算不收敛的严重错误。

在分析电路的相位裕度时，这两个缺点恰恰完全体现在对方程组(3-31)中 a) 式的求解中。一方面，从数学计算的角度看，方程 a) 的求解是一个复杂的问题，直接对其求导更是需要大量的时间和空间复杂度；于此同时，我们无法通过复杂的传输函数预测增益为 0dB 时的工作频率，很难给出合理的迭代初值，极易由于初值的不合理造成迭代不收敛的情况。

幸运的是，由于分析电路在 GRASS 中的特殊表现形式，我们可以方便的得到方程 a) 的一阶导数。我们假设函数

$$G(s) = |G(s)| e^{j\angle G(s)} \quad (3-35)$$

则函数 $G(s)$ 关于电路元件 x 的归一化敏感度可以表示为

$$\begin{aligned} & \text{Sens}(G(s), x) \\ &= \frac{\partial \ln(|G(s)| e^{j\angle G(s)})}{\partial \ln x} = \frac{\partial \ln(|G(s)|)}{\partial \ln x} + \frac{\partial \ln(e^{j\angle G(s)})}{\partial \ln x} \\ &= \frac{\partial \ln(|G(s)|)}{\partial \ln x} + j \frac{\partial \angle G(s)}{\partial \ln x} \\ &= \text{Sens}(|G(s)|, x) + j \angle G(s) \text{Sens}(\angle G(s), x) \end{aligned} \quad (3-36)$$

由表达式(3-36)可知，函数幅值相对于电路元件的归一化灵敏度为函数本身相对于电路元件的归一化灵敏的实部，即

$$\text{Sens}(|G(s)|, x) = \text{Re}(\text{Sens}(G(s), x)) \quad (3-37)$$

因此， $|G(s)|$ 关于 x 的一阶导数为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial |G(s)|}{\partial x} = \frac{|G(s)|}{x} \text{Sens}(|G(s)|, x) \\ &= \frac{|G(s)|}{x} \text{Re}(\text{Sens}(G(s), x)) = \frac{|G(s)|}{x} \text{Re}\left(\frac{x}{G(s)} \frac{\partial G(s)}{\partial x}\right) \end{aligned} \quad (3-38)$$

根据表达式(3-38)，方程组(3-31)中的 a) 式对 x 求导可以表示为以下形式：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f(w)}{\partial x} &= \frac{\partial(20 \frac{\ln |N(jw)|}{\ln 10} - 20 \frac{\ln |D(jw)|}{\ln 10})}{\partial x} \\
 &= \frac{20}{\ln 10} \frac{1}{|N(jw)|} \frac{\partial |N(jw)|}{\partial x} - \frac{20}{\ln 10} \frac{1}{|D(jw)|} \frac{\partial |D(jw)|}{\partial x} \\
 &= \frac{20}{\ln 10} \frac{1}{x} \operatorname{Re}(\frac{x}{N(jw)} \frac{\partial N(jw)}{\partial x}) - \frac{20}{\ln 10} \frac{1}{x} \operatorname{Re}(\frac{x}{D(jw)} \frac{\partial D(jw)}{\partial x})
 \end{aligned} \tag{3-39}$$

我们已经知道，GRASS 能够对分析电路构建的 SDD 求传输函数的灵敏度，因此，可以方便的从求导后的 SDD 中提取出与表达式(3-39)相关的参数。与使用数值求导方法相比，符号化导数表述方式更为简洁。

当然，我们也可以引入截弦法近似求解导数值 $f'(x_k)$ 。由于

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \tag{3-40}$$

所以，将上式代入表达式(3-34)可得

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} (x_k - x_{k-1}) \quad (k = 0, 1, \dots) \tag{3-41}$$

比较符号化导数法和截弦法可以发现，前者需要对电路的 SDD 增加简单的图操作，在计算时只用到前一步的迭代值，且具有平方收敛速度；而后者要用到前两步的迭代结果，因此必须给出两个迭代初值，且收敛速度较前者稍慢，为超线性收敛。

为了防止迭代发散，我们对迭代过程再附加一项要求，即具有单调性：

$$|f(x_{k+1})| < |f(x_k)| \tag{3-42}$$

满足这项要求的算法称为下山法。为此，我们引入下山因子 λ ，引入下山因子的牛顿迭代法即牛顿下山法，使得表达式(3-34)变为：

$$x_{k+1} = x_k - \lambda \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (k = 0, 1, \dots) \tag{3-43}$$

下山因子从 $\lambda = 1$ 开始，逐次将 λ 减半进行试算，直到能够使下降条件式(3-42)成立为止。

综合表达式(3-41)和式(3-43)，得到新的迭代公式如下：

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})} (x_k - x_{k-1}) \quad (k = 0, 1, \dots) \tag{3-44}$$

公式(3-39)和(3-44)可以很好的弥补牛顿法在求解相位裕度时的两个不足之处。符号化导数法和截弦法可以很好的避免复杂导数的计算；由于方程组(3-31)中的方程 a) 在实数域上仅存在一个实根，因此以任意初值开始的牛顿下山迭代必

然收敛到这个唯一的根。

应用迭代公式(3-44)，我们可以求出方程组(3-31)中方程 a)的实根 w^* ，电路在频率 w^* 处的相位 $\theta(w^*)$ 可以根据如下表达式获得：

$$\theta(w^*) = \arctan N(jw^*) - \arctan D(jw^*) \quad (3-45)$$

将 $\theta(w^*)$ 代入方程 b) 即可得到电路的相位裕度。

或许，仅仅知道电路在某一固定工作点的相位裕度并不能让设计者十分满意。但是，符号化仿真器最大的特点是能够十分精确的预测改变设计参数与电路特性曲线之间的关系，对于 GRASS 而言，改变元件的值，仅需重新遍历电路的 SDD 重新进行运算，既可以得到新的电路性能。因此，我们可以改变某一元件的值，得到与之对应的相位裕度曲线，甚至可以改变两个或者多个元件的值，从不同的角度洞察相位裕度的变化趋势，这将给模拟电路设计者带来如 Spice 等数值仿真工具无法超越的便利。

3.3.2 相位裕度的符号化灵敏度

我们已经知道，灵敏度分析的一个重要应用就是在电路优化时提高设计效率，更快获得良好的电路性能。因此，如果能够提取出相位裕度在一定范围内关于任意一个电路参数的灵敏度的精确表示，将为以调整系统稳定性为设计目标的模拟电路设计过程带来极大的便利。

根据归一化灵敏度的定义，相位裕度相对于电路参数 x (x 为电容、电感、电阻或受控源的控制系数) 的归一化灵敏度为：

$$Sens(PM(w, x), x) = \frac{x}{PM(w, x)} \frac{\partial PM(w, x)}{\partial x} \quad (3-46)$$

其绝对灵敏度为：

$$abs_Sens(PM(w, x), x) = \frac{\partial PM(w, x)}{\partial x} \quad (3-47)$$

从方程组(3-31)中方程 b) 得知：

$$PM = 180^\circ - |\theta(w, x)| \quad (3-48)$$

且 $|\theta(w)| < 0$ ，则绝对灵敏度可以进一步表示成：

$$abs_Sens(PM(w, x), x) = \frac{\partial PM(w, x)}{\partial x} = \frac{\partial(180^\circ - |\theta(w, x)|)}{\partial x} = \frac{\partial \theta(w, x)}{\partial x} \quad (3-49)$$

假设通过 GRASS 对电路进行符号化分析后得到的电路传输函数如下：

$$H(jw, x) = \frac{N(jw, x)}{D(jw, x)} = \frac{C(w, x) + jD(w, x)}{A(w, x) + jB(w, x)} = |H(jw, x)| e^{j\angle\theta(w, x)} \quad (3-50)$$

则电路的相位表达式为：

$$\theta(w, x) = \arctan \frac{D(w, x)}{C(w, x)} - \arctan \frac{B(w, x)}{A(w, x)} \quad (3-51)$$

$A(w, x)$ 、 $B(w, x)$ 、 $C(w, x)$ 、 $D(w, x)$ 分别代表了分子多项式的实部和虚部，以及分母多项式的实部和虚部。其中，

$$\begin{aligned} A(w, x) &= \sum_{i=4n} a_i(x)w^i - \sum_{i=4n+2} a_i(x)w^i \\ B(w, x) &= \sum_{i=4n+1} a_i(x)w^i - \sum_{i=4n+3} a_i(x)w^i \\ C(w, x) &= \sum_{j=4n} b_j(x)w^j - \sum_{j=4n+2} b_j(x)w^j \\ D(w, x) &= \sum_{j=4n+1} b_j(x)w^j - \sum_{j=4n+3} b_j(x)w^j \end{aligned} \quad (3-52)$$

因此，将表达式(3-51)代入绝对灵敏度表达式(3-49)，有

$$\begin{aligned} abs_Sens(PM(w, x), x) &= \frac{\partial\theta(w, x)}{\partial x} = \frac{\partial(\arctan \frac{D(w, x)}{C(w, x)} - \arctan \frac{B(w, x)}{A(w, x)})}{\partial x} \\ &= \frac{1}{1 + (\frac{D(w, x)}{C(w, x)})^2} \frac{\frac{\partial D(w, x)}{\partial x} C(w, x) - \frac{\partial C(w, x)}{\partial x} D(w, x)}{C^2(w, x)} \\ &\quad - \frac{1}{1 + (\frac{B(w, x)}{A(w, x)})^2} \frac{\frac{\partial B(w, x)}{\partial x} A(w, x) - \frac{\partial A(w, x)}{\partial x} B(w, x)}{A^2(w, x)} \\ &= \frac{\frac{\partial D(w, x)}{\partial x} C(w, x) - \frac{\partial C(w, x)}{\partial x} D(w, x)}{C^2(w, x) + D^2(w, x)} - \frac{\frac{\partial B(w, x)}{\partial x} A(w, x) - \frac{\partial A(w, x)}{\partial x} B(w, x)}{A^2(w, x) + B^2(w, x)} \end{aligned} \quad (3-53)$$

从表达式(3-53)中可以发现，相位裕度的灵敏度不仅与电路传输函数分子、分母多项式的实部和虚部有关，也与其关于电路元件 x 的一阶导数有关，表达式如下：

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A(w, x)}{\partial x} &= \sum_{i=4n} \frac{\partial a_i(x)}{\partial x} w^i - \sum_{i=4n+2} \frac{\partial a_i(x)}{\partial x} w^i \\
 \frac{\partial B(w, x)}{\partial x} &= \sum_{i=4n+1} \frac{\partial a_i(x)}{\partial x} w^i - \sum_{i=4n+3} \frac{\partial a_i(x)}{\partial x} w^i \\
 \frac{\partial C(w, x)}{\partial x} &= \sum_{j=4n} \frac{\partial b_j(x)}{\partial x} w^j - \sum_{j=4n+2} \frac{\partial b_j(x)}{\partial x} w^j \\
 \frac{\partial D(w, x)}{\partial x} &= \sum_{j=4n+1} \frac{\partial b_j(x)}{\partial x} w^j - \sum_{j=4n+3} \frac{\partial b_j(x)}{\partial x} w^j
 \end{aligned} \tag{3-54}$$

可以看出，求传输函数分子、分母多项式的实部和虚部关于电路元件 x 的一阶导数十分简单，只需对系统传输函数进行一次求导后进行 s 展开，得到原传输函数所有分子、分母多项式系数关于元件 x 的一阶导数表达式，再对这些求导后的多项式系数按照实部、虚部进行划分即可。

当然，表达式(3-51)告诉我们，相位裕度不仅仅是关于电路符号 x 的函数，根据相位裕度本身的定义，其也与回路增益等于 0dB 时的工作频率 w 有关。相位裕度及其灵敏度的提取，都是基于电路幅值为 0dB 时的工作频率 w 进行计算的，因此，在进行相位裕度的灵敏度分析前，都要应用上一节中介绍的方法解出相应的 w 。

需要注意的是，所有电路元件在 GRASS 中以导纳的形式存储，因此，对于不同的电路元件，在进行相位裕度灵敏度提取时需要根据其类型添加相应的修正因子。

如，电阻元件 R 在 GRASS 中表现为导纳 G ($G=1/R$) 的形式，因此，其相位裕度表达式为 $PM(w, G)$ 。求 $PM(w, G)$ 关于电阻 R 的绝对灵敏度，有：

$$\frac{\partial PM(w, G)}{\partial R} = \frac{\partial PM(w, G)}{\partial \frac{1}{G}} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial PM(w, G)}{\partial R} \tag{3-55}$$

即，求解相位裕度关于电阻元件 R 的绝对灵敏度时，必须乘以其修正因子 $-1/R^2$ 。

表 3-1 中列出了不同电路元件对应的相位裕度绝对灵敏度修正因子。

表 3-1 电路元件的相位裕度绝对灵敏度修正因子

元件类型	修正因子
电阻 R	$-1/R^2$
电感 L	$-1/(Ls)^2$
电容 C	1
控制系数 Gain	1

3.3.3 符号化相位裕度优化算法

至此，符号化仿真器 GRASS 已经能建立模拟电路相位裕度与电路参数之间的解析关系，导出相位裕度灵敏度的解析表示及其依赖参数的行为倾向，从而可以根据性能指标优化电路参数。

符号化相位裕度的优化算法和符号化带宽自动优化有着异曲同工之妙，即改变电路元件 x 的参数值 $value$ ，计算当前工作点的相位裕度 PM_c 与设计指标 PM_t 的差值 f ($f=PM_t-PM_c$) 及其相位裕度绝对灵敏度 $abs_Sens(PM_c, x)$ ，以相位裕度绝对灵敏度符号为向导，确定 $value$ 的改变方向，使 f 趋近于 0。

首先，要确定令函数 $f=0$ 的有根区间范围 $[a, b]$ ，设有根区间的两个端点在进行以下迭代计算前的初值均为元件参数调整前的值 $value$ 。

根据相位裕度当前值 PM_c 与目标值 PM_t 的差值 f 以及相位裕度绝对灵敏度 $abs_Sens(PM_c, x)$ 的符号关系，对电路元件 x 的参数调整存在这以下四种情况：

- (1) 若 $f>0$, $abs_Sens(PM_c, x)>0$, 则减小元件 x 的参数 $value$;
- (2) 若 $f>0$, $abs_Sens(PM_c, x)<0$, 则增大元件 x 的参数 $value$;
- (3) 若 $f<0$, $abs_Sens(PM_c, x)>0$, 则增大元件 x 的参数 $value$;
- (4) 若 $f<0$, $abs_Sens(PM_c, x)<0$, 则减小元件 x 的参数 $value$ 。

循环计算，直到得到的区间 $[a, b]$ 满足 $f(a)*f(b) < 0$ ，则必然存在一点使得 $f=0$ ，即 $PM_c = PM_t$ 。则通过二分迭代法【23】在区间 $[a, b]$ 内进行函数 f 的根搜索，能够找到使得 f 满足误差限 ε 的 x 参数，在此，不再赘述二分法求解非线性方程的详细步骤。

因此，符号化相位裕度自动优化算法可以归纳如下：

步骤一：给出相位裕度设计指标 PM_t 及误差限 ε ；

步骤二：提取元件初值，计算此时主极点 PM_t 与 PM_c 之间的差值 f ；

步骤三：计算相位裕度的绝对敏感度 $abs_Sens(PM_c, x)$ ，通过判断 f 和 $abs_Sens(PM_c, x)$ 的符号改变元件参数，直到找到区间 $[a, b]$ ，使得 $f(a)*f(b) < 0$ ；

步骤四：在有根区间 $[a, b]$ 内进行二分法根搜索，使得有根区间收敛于某一点，电路元件在该点的值，即相位裕度满足给定设计指标的电路参数。

3.4 本章小结

本章系统的讲述了符号化带宽自动优化方法和符号化相位裕度自动优化算法。在对带宽和相位裕度自动优化算法描述中，都分别详细的介绍了它们的定义

和求解方案,针对带宽和相位裕度的不同特点给出了相应的符号化灵敏度提取办法,并以灵敏度信息为参考,提出了合理的自动优化方法。

在模拟电路的设计中,主要受电路主极点控制的系统带宽和由相位裕度引导的电路稳定性,都是设计师重点考虑的两个主要设计指标,带宽和相位裕度自动调整的实现,将大大提高模拟电路设计优化的自动化程度,缩短模拟电路设计流程。

第四章 应用案例

本章将选取一系列不同规模的基准电路，针对第三章中提出的符号化带宽及相位裕度优化算法的正确性和求解进度进行测试。测试电路包括 $\mu\text{a}741$ 运算放大器、 $\mu\text{a}725$ 运算放大器、Cascode 结构的 CMOS 运算放大器、带米勒补偿的三级运算放大器等。

上述测试电路的规模不尽相同，在对电路进行分析时，我们对三极管采用如图 4-1 所示的小信号模型；对于包含有源 MOS 管器件的电路，在分析时则采用如图 4-2 所示的小信号模型。

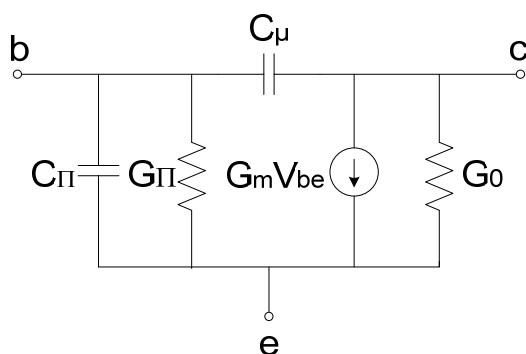


图 4-1 三极管小信号模型

Fig.4-1 Small Signal Model for BJT

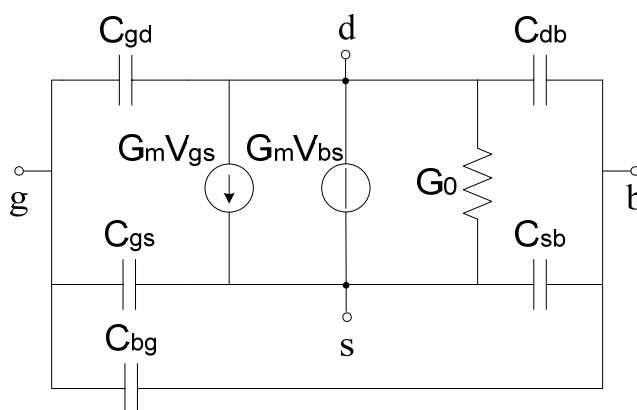


图 4-2 MOS 管小信号模型

Fig.4-2 Small Signal Model for MOSFET

4.1 μ a741 运算放大器仿真结果分析

μ a741 运算放大器电路如图 4-3 所示，其由直流偏置电路、双端差分放大线路、单端放大电路、短路保护电路和输出电路组成。我们将以 μ a741 运算放大器为例，针对 GRASS 仿真器在带宽和相位裕度方面的各项应用进行仿真和分析。

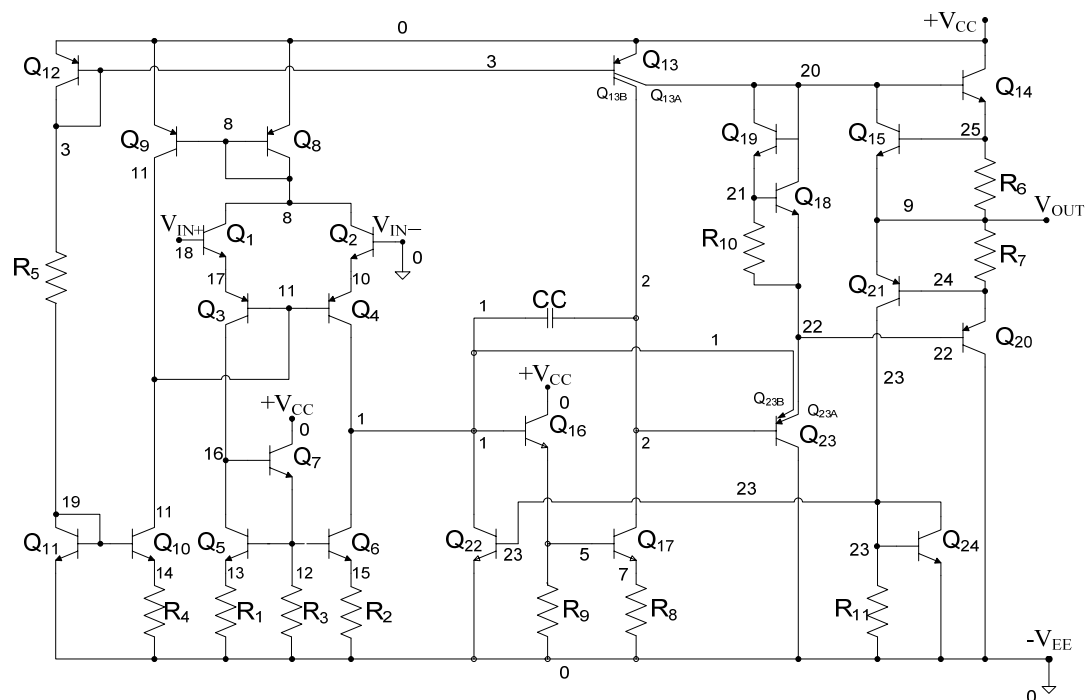


图 4-3 μ a741 运算放大器电路图

Fig.4-3 μ a741 Amplifier

4.1.1 μ a741 运算放大器带宽及其自动优化结果分析

电路的系统带宽主要受路频响应曲线中的主极点影响。在 3.2.1 节中，我们已经介绍了一种新的主极点提取方法，即矩匹配法。现在，将分别使用以下几种方式计算 μ a741 运算放大器的主极点，并对测试结果进行比较和分析。

- (1) 以 GRASS 为仿真平台通过矩匹配法对主极点进行求解；
- (2) 以 SPICE 为仿真平台对传输函数极点进行求解，提取其中的主极点；
- (3) 采用传统的根分离法【24】对主极点进行求解，即当电路传输函数为：

$$H(s) = \frac{N(s, b_0, b_1, \dots, b_q)}{D(s, a_0, a_1, \dots, a_p)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_q s^q}{a_0 + a_1 s + \dots + a_p s^p} \quad (4-1)$$

如果分母的根存在关系：

$$|s_1| \ll |s_2| \ll \dots \ll |s_k| \ll \dots \ll |s_p| \quad (4-2)$$

则， s_k 可以近似的表示为：

$$s_k = -a_{k-1} / a_k \quad (4-3)$$

上述三种分析方法得到的 μa741 运算放大器电路的主极点如表 4-1 所示。

表 4-1 μa741 运算放大器主极点分析

rad/s	GRASS	SPICE	根分离法
μa741	-110.283	-110.2837	-110.237

从仿真结果可以看出，即便测试电路已经达到一定规模（20~30 个传输晶体管），主极点矩匹配算法依然能够在合理的误差范围内对电路的主极点进行分析，其求值精度远远高于传统的根分离方法。假设我们以 SPICE 仿真得到的结果为标准，使用 GRASS 对 μa741 运算放大器进行主极点分析得到的值为 -110.283，使用根分离法求得的主极点为 -110.237，前者与 SPICE 仿真结果的相对误差为 0.000634727%，后者的相对误差则为 0.0423453%。显然，采用根分离方法对主极点的求值精度远远低于矩匹配法。尽管这种新的算法从某种程度上来说，和传统的根分离方法一样，在对主极点的求解问题上都对所有极点之间差距具有很强的依赖性，极点间距离越远，求值精度越高，但是相比之下，使用 GRASS 进行主极点计算可以得到一个与精确解更加接近的分析数据，设计者使用 GRASS 得到的结果可以极大的提高电路带宽估计的可靠性。

主极点的位置与电路传输函数分子、分母多项式的某些系数有关，而这些符号化的系数是电路元件符号的组合，可以看成是某个特定电路元件的函数，因此，也可以将主极点看成是某个电路元件的函数，元件参数的变化会改变主极点的取值，从而得到主极点随该元件变化的曲线，如图 4-4 所示。

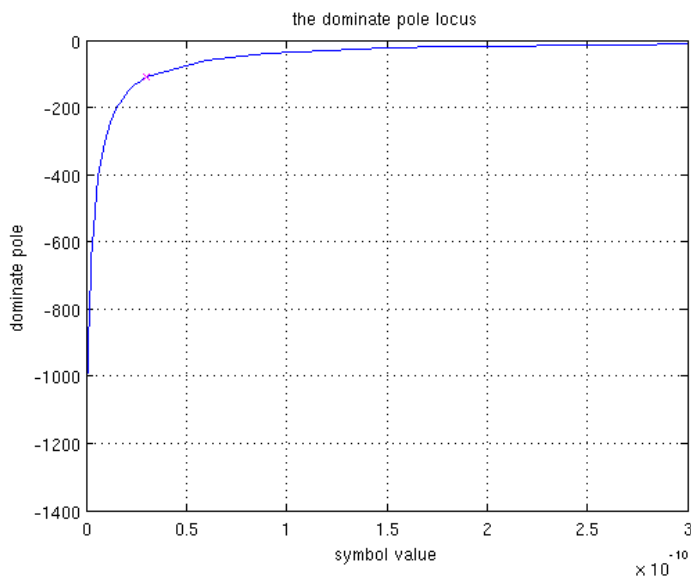


图 4-4 主极点的根轨迹

Fig.4-4 Locus of Dominant Pole

上图以 $\mu\text{a}741$ 运算放大器为分析对象，描述了主极点随电路补偿电容 CC 变化的轨迹。从图中我们可以看出，当 CC 的值较小时，主极点随 CC 的增大以很快的速度变大，当 CC 达到一定值时，主极点变化缓慢，逐渐向 0 逼近。

众所周知，主极点的位置直接决定了电路的带宽。尽管我们可以通过改变电路某些元件参数达到改变带宽的目的，并通过观察电路传输函数的频响曲线来观察这种变化，但是，如果能够通过一些新的方法更加直观的看到如图 4-4 所示的主极点变化曲线，将大大提高电路设计者的工作效率。

在电路设计中，当以电路带宽为分析目标时，我们希望有一种仿真工具可以对主极点进行分析并且提供一些相关信息，比如在已知电路固定参数时改变电路元件对主极点位置的影响程度，又如某一电路元件在不同范围进行调整时对主极点位置的影响程度等等。

GRASS 基于电路拓扑结构构建了分析电路的图约化判定图，由于同一电路元件分布在 SDD 同一个层次上，我们可以方便的求解主极点相对于某个电路元件的灵敏度。如在对 $\mu\text{a}741$ 运算放大器的分析中，我们可以得到在固定电路参数时，主极点相对不同电路元件的灵敏度列表，如表 4-2 所示。

表 4-2 $\mu\text{a}741$ 部分电路元件的主极点归一化敏感度

Symbol	Sensitivity	Symbol	Sensitivity	Symbol	Sensitivity
RO17	-0.192301	CPI17	3.9488e-11	CMU17	2.36368e-05
R8	0.201344	GM16	-0.903437	RPI16	-1.18514e-05
RO16	-2.92401e-08	CPI16	3.52115e-11	CMU16	-1.52194e-15

从表 4-2 中可以看出，不同电路元件在其既定取值附近对主极点的灵敏度不尽相同。灵敏度为正，说明主极点随元件值的增加而增加；灵敏度为负，说明主极点随元件值的增加而减小。灵敏度的绝对值越大，即靠近 1，改变元件值对主极点位置的影响较大。由此，当希望可以快速对主极点进行调整时，我们可以对所有元件的主极点灵敏度进行排序，直接找到那些对主极点灵敏度较高的元件，如，GM16 在现有参数附近的变化对主极点的影响非常大，其归一化灵敏度为 -0.903437，因此，对 GM16 的微小改变都会影响主极点较大范围的变化。

值得注意的是，在对主极点的分析中，我们仅能通过电路元件的灵敏度确定哪些参数对主极点的影响较大，并非所有灵敏度小的元件都不会对主极点产生重大影响。以 $\mu\text{a}741$ 运算放大器的补偿电容 CC 为例，在某个固定工作点时，其主极点归一化灵敏度仅为 $2.9837\text{e-}11$ ，其灵敏度在 $\mu\text{a}741$ 运算放大器所有 130 多个元件的灵敏度排序中为 82 位，比较靠后，但是，当改变 CC 的值时，主极点位置会发生明显的改变。我们从电路分析的角度来解释这个现象，补偿电容 CC 跨接在电路放大级的输入和输出两端，等效到输入端时的等效电容为其值与放大增益的乘积，因此，尽管只对 CC 的值进行了小范围的调整，但是其等效电容却发生了显著的变化，从而对主极点位置产生很大影响。

因此，在使用灵敏度进行主极点分析时，我们可以得到以下结论：在灵敏度排序中，位置靠前的符号对主极点的影响一定较大，但是位置靠后的符号对主极点的影响不一定很小。

又或者，我们仅分析某一电路元件取值对主极点位置的影响，一种方式是通过观察上面已经介绍的主极点的根轨迹，另一种方式就是通过观察主极点灵敏度的变化曲线来得到电路元件值在不同范围内对主极点影响的大小，如图 4-5、图 4-6 所示。

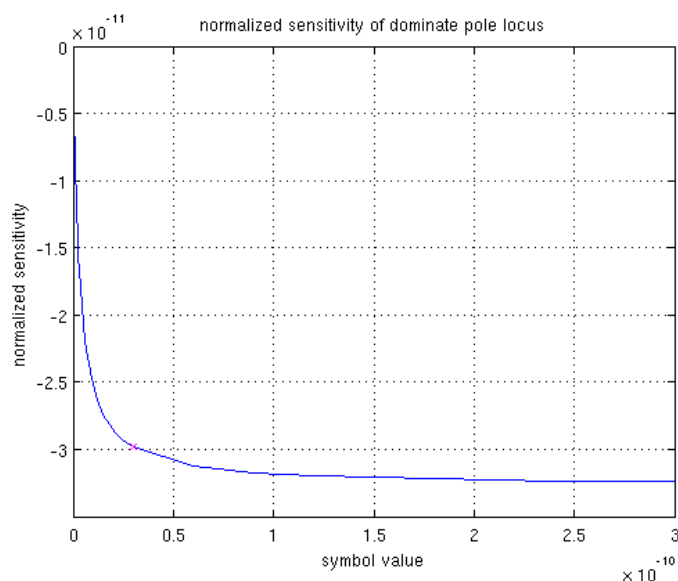


图 4-5 主极点归一化灵敏度曲线

Fig.4-5 Locus of Dominant Pole's Normalized Sensitivity

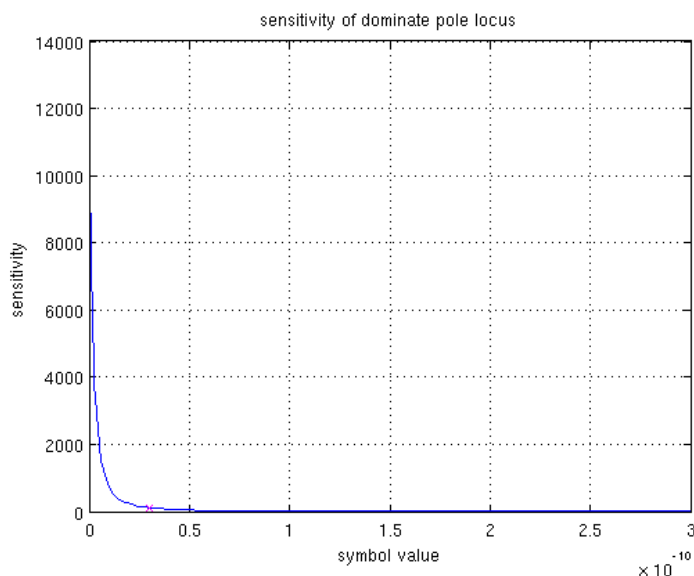


图 4-6 主极点灵敏度曲线

Fig.4-6 Locus of Dominant Pole's Sensitivity

图 4-5 和图 4-6 分别描述了 $\mu\text{a}741$ 运算放大器主极点关于补偿电容 C_C 的归一化和非归一化灵敏度曲线。从图 4-6 中可以看出，当补偿电容 C_C 较小时，其微小改变会使得主极点的位置发生巨大改变，当达到一定值后，再改变 C_C 的值对主极点的影响程序逐渐减小，趋近于某个固定值。比较图 4-4 和图 4-6，发现二者对电路元件与主极点关系的分析是相吻合的。

有了电路主极点及其灵敏度信息，便可以通过自动改变电路元件参数实现系统带宽的优化。假如我们希望改变电路元件 C_C 的参数，使主极点趋近 -650rad/s 。主极点自动优化算法将通过符号化提取和敏感度计算自动调整 C_C 的值，使之从初值 30pf 调整至 2.67pf ，从而满足设计要求。我们将主极点自动优化后的电路参数重新代入 Spice 中进行零极点分析，得到在新的电路参数条件下的主极点为 -650.1475rad/s 。经过参数调整的电路带宽将得到优化，调整前后的电路频率响应如图 7 所示，我们看到明显的带宽增加。

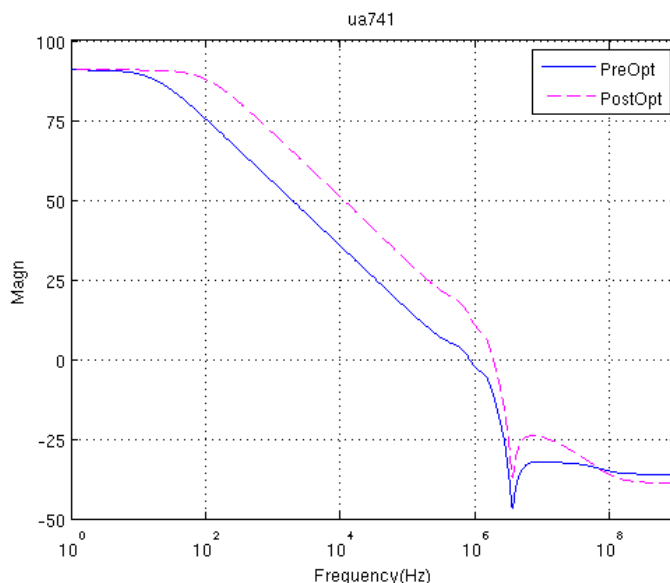
图 4-7 $\mu\text{a}741$ 优化前后的幅频响应图

Fig.4-7 Frequency Response preOpt and postOpt

可以看出，通过主极点自动优化算法进行电路参数调整得到的结果不仅与 Spice 仿真结果相吻合，而且弥补了 Spice 等数值仿真工具在自动设计方面的不足，将给设计师在模拟电路带宽性能的调整上带来极大便利。

4.1.2 $\mu\text{a}741$ 运算放大器相位裕度及其自动优化结果分析

相位裕度是标志模拟电路稳定性的重要参数之一。GRASS 针对每一个电路拓扑结构产生的 SDD，可以自动的获取与相位裕度相关的公式，通过重复计算可以得到相位裕度随电路元件参数变化的曲线，设计者可以根据这些信息对性能差异进行取舍，使电路设计符合特定的性能要求。

图 4-8 和图 4-9 显示了 GRASS 的相位裕度分析结果与 SPICE 分析结果的比较，二者的数据均是对电路元件赋予不同的值并进行求解获得。其中，图 4-8 是 $\mu\text{a}741$ 运算放大器相位裕度随电路元件 GM16 变化的变化曲线，图 4-9 是 $\mu\text{a}741$ 运算放大器相位裕度随电路元件 R11 变化的变化曲线。

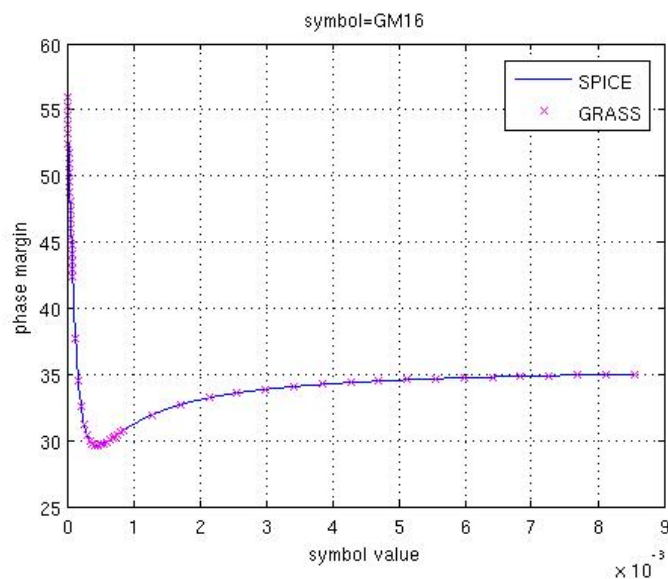


图 4-8 μ 741 相位裕度随 GM16 的变化曲线

Fig.4-8 Phase Margin Locus with GM16

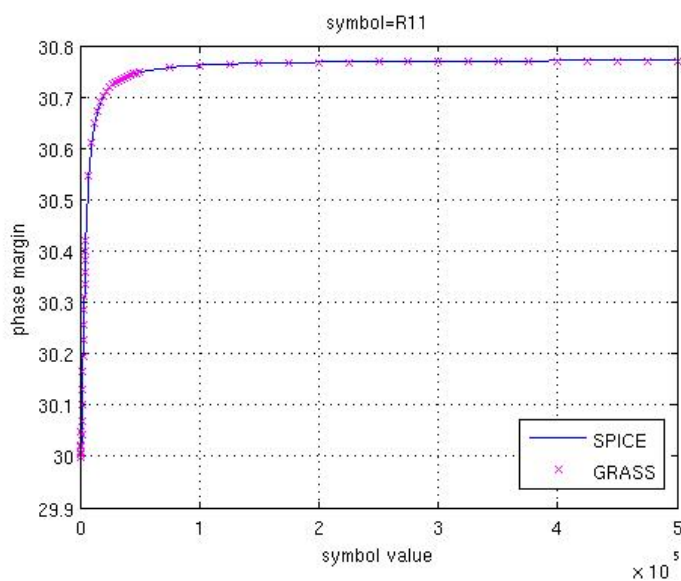


图 4-9 μ 741 相位裕度随 R11 的变化曲线

Fig.4-9 Phase Margin Locus with R11

从图 4-8 和图 4-9 中我们可以看到，GRASS 分析的结果和 SPICE 仿真结果完全一致，而 SPICE 是工业界公认的标准数字仿真器，所以可以证明 GRASS 分析结果的正确性。

在电路优化过程中，有时候需要同时调整两个甚至数量更多的元件的值对相位裕度进行优化，选取其中使得电路性能能够达到设计要求的元件参数组合作为最佳选择。使用 SPICE 等数值仿真工具进行这类操作非常麻烦，需要设计者不断的手工重复操作，工作效率比较低。符号化分析工具可以避免这类的重复劳动，

只需给定元件的取值范围，GRASS 将自动改变元件参数，遍历分析电路的 SDD，提取有关参数进行计算，得到相位裕度关于多个电路元件的变化曲线。

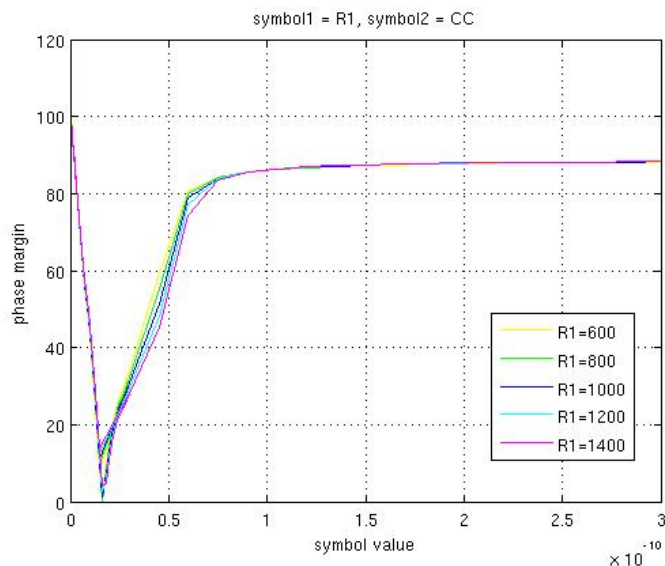


图 4-10 相位裕度关于两个电路元件变化的二维曲线

Fig.4-10 Phase Margin Locus with 2 Symbols

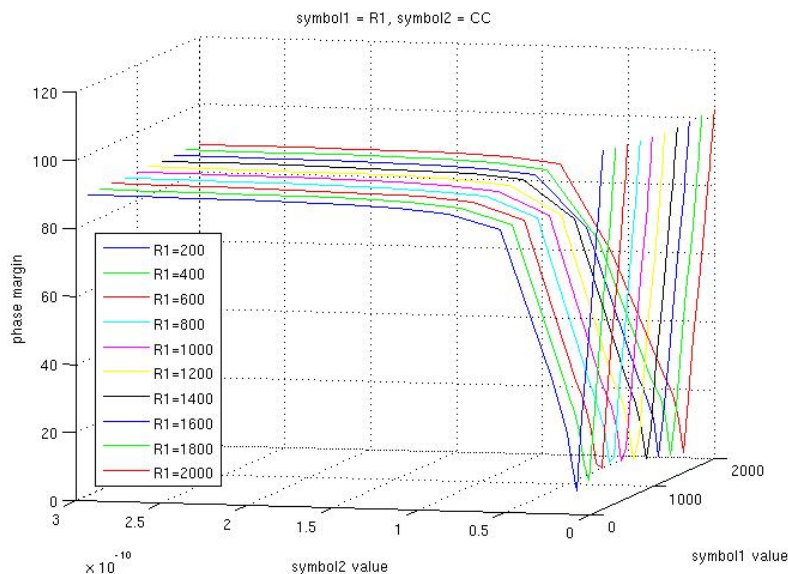


图 4-11 相位裕度关于两个电路元件变化的三维曲线

Fig.4-11 Phase Margin Locus with 2 Symbols

图 4-10 和图 4-11 分别显示了 μa741 运算放大器的相位裕度随电阻元件 R1 和补偿电容 CC 变化的二维和三维曲线。设计者可以通过这些图形方便的对多个元件参数和相位裕度的关系进行判断，避免电路优化中的重复劳动。

同样的，根据 3.3 节中介绍的符号化相位裕度优化算法，我们可以根据设计

对系统稳定性的特殊要求，将相位裕度自动调整到理想的目标值。图 4-12 为 $\mu\text{a}741$ 运算放大器的相位裕度随电路元件 CC 值改变产生的变化曲线。

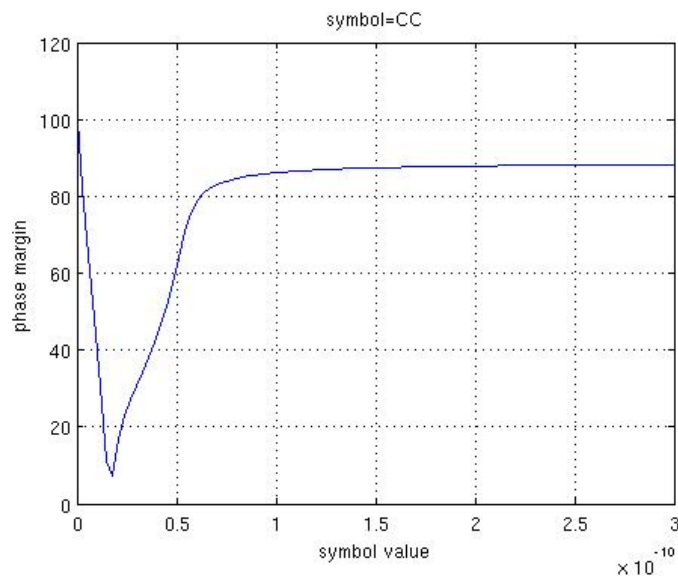


图 4-12 $\mu\text{a}741$ 相位裕度随 CC 的变化曲线

Fig.4-12 Phase Margin Locus with CC

假如我们希望改变电路元件 CC 的参数，将相位裕度趋近调整至 60 度。相位裕度自动优化算法将通过符号化提取和敏感度计算自动调整 CC 的值，使之从初值 30pf 调整至 49.2pf，从而满足设计要求。我们将相位裕度自动优化后的电路参数重新代入 Spice 中进行相位裕度分析，得到在新的电路参数条件下的相位裕度为 60.0033 度。经过参数调整后电路的相位裕度将得到优化，与此同时，优化前后的电路频率响应曲线也会产生相应的调整。对相位裕度进行优化后，电路的幅频特性曲线和相频特性曲线如图 4-13 所示。

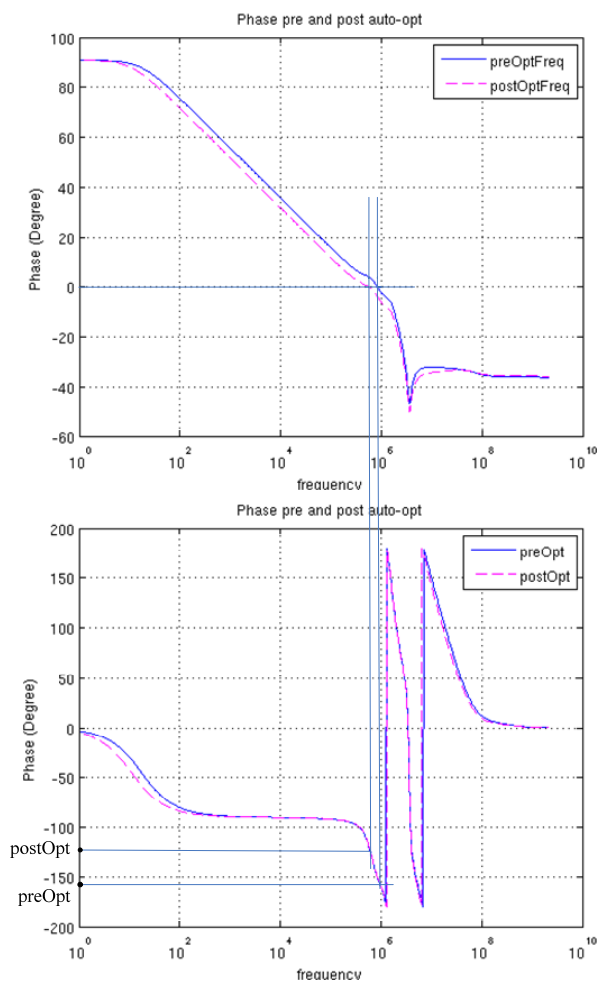


图 4-13 $\mu\text{A}741$ 优化前后的相频特性曲线图

Fig.4-13 Phase Curve preOpt and postOpt

可以看出，通过相位裕度自动优化算法进行电路参数调整得到的结果不仅与 Spice 仿真结果相吻合，而且弥补了 Spice 等数值仿真工具在自动设计方面的不足，将给设计师在模拟电路相位裕度的调整上带来极大便利。

最后，根据电路参数调整时，将同时改变电路带宽和相位裕度这个特点，我们还可以得到如图 4-14 所示的曲线。

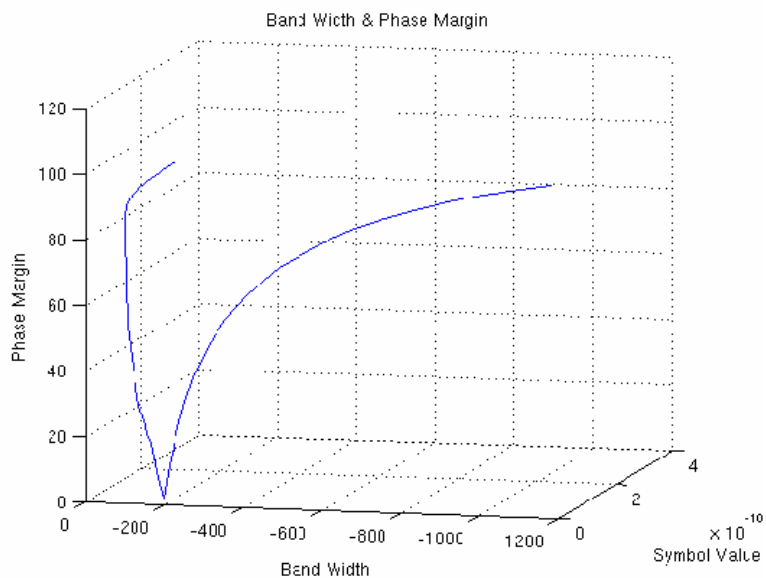
图 4-14 μ a741 电路参数、影响带宽和相位裕度的关系

Fig.4-14 Relationship between Symbol Value, Band Width and Phase Margin

图 4-14 展示了当改变电路元件 CC 的值时，对系统带宽和相位裕度这两个电路性能产生的影响。设计者可以从图中方便的获得补偿电容 CC 在不同参数下的带宽和相位裕度，根据设计的具体要求选取一个合理的 CC 值，以平衡带宽和相位裕度二者之间的关系对电路整体性能的影响。

4.2 μ a725 运算放大器仿真结果分析

μ a725 运算放大器电路如图 4-15 所示，下面，将以该运算放大器为例，针对 GRASS 仿真器在带宽和相位裕度方面的各项应用进行仿真和分析。

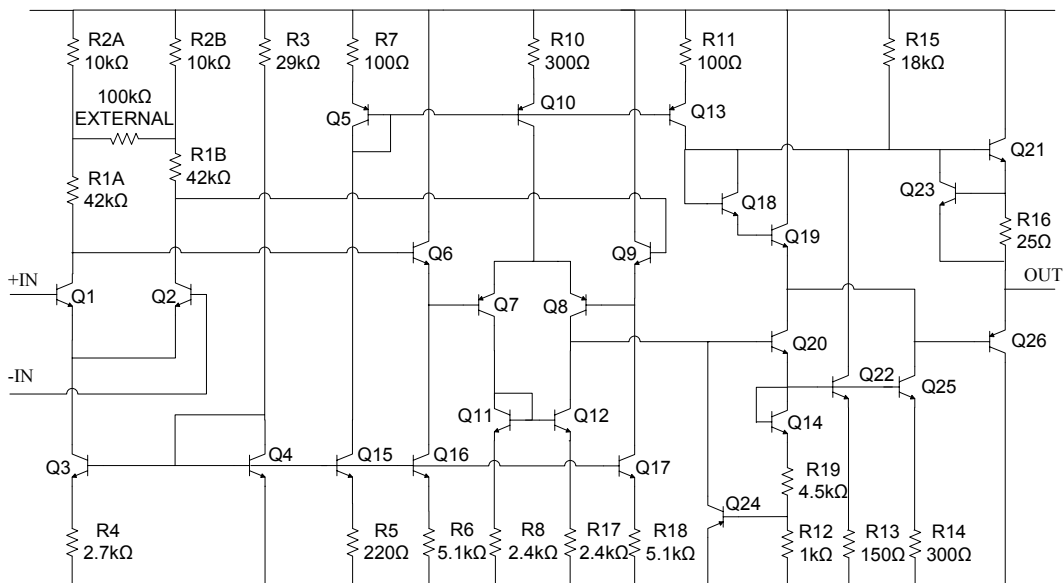


图 4-14 $\mu\text{A}725$ 运算放大器电路图

Fig.4-14 $\mu\text{A}725$ Amplifier

4.2.1 $\mu\text{A}725$ 运算放大器带宽及其自动优化结果分析

使用 GRASS 对 $\mu\text{A}725$ 运算放大器进行矩匹配法符号化主极点提取得到的值为 -7555.87rad/s ，使用传统根分离法得到的主极点值为 -7472.7rad/s ，与 Spice 仿真结果 -7620.2rad/s 为标准，采用矩匹配法进行主极点提取来进行带宽的近似分析，精度明显高于传统的根分离分析法。

若将主极点看成是某个电路元件的函数，可得到主极点随该元件变化的曲线。实验电路的主极点随元件 RO8 变化的根轨迹如图 4-15 所示。

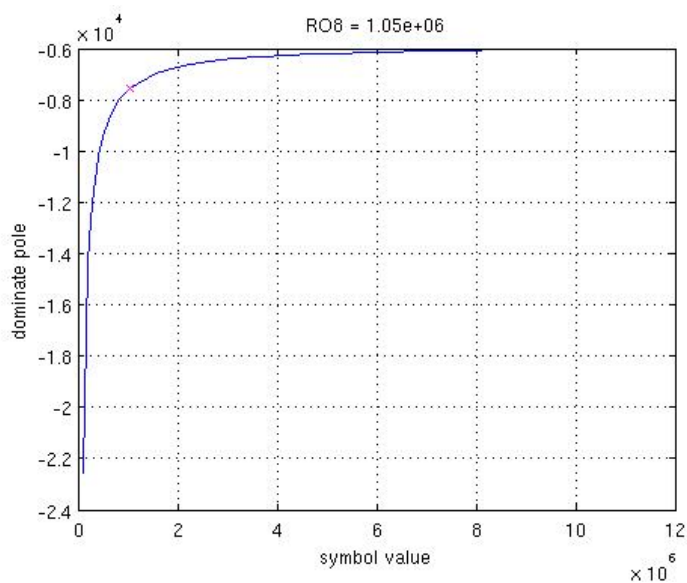


图 4-15 $\mu\text{a}725$ 主极点随 RO8 的变化曲线

Fig.4-15 Locus of Dominant Pole with RO8

假如我们希望改变电路元件 RO8 的参数，使主极点趋近 -20000rad/s 。主极点自动优化算法将通过符号化提取和敏感度计算自动调整该参数，使之从初值 $1.05\text{e}6\Omega$ 调整至 124685Ω ，从而满足设计要求。我们将主极点自动优化后的电路参数重新代入 Spice 中进行零极点分析，得到在新的电路参数条件下的主极点为 -20456.8rad/s 。经过参数调整的电路带宽将得到优化，调整前后的电路频率响应如图 4-16 所示。

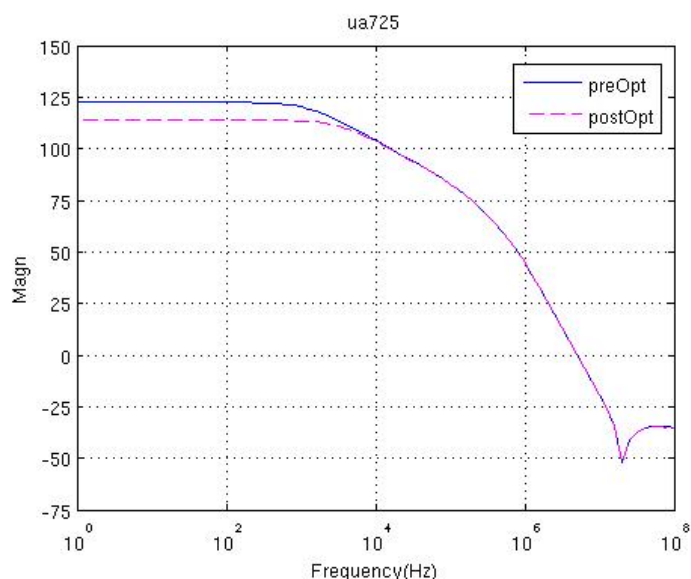
图 4-16 $\mu\text{a}725$ 优化前后的幅频响应图

Fig.4-16 Frequency Response preOpt and postOpt

从图 4-16 可以看到，参数调整使得带宽增加至目标值，但是与此同时，对系统增益亦产生了一定影响，使之有所下降。

4.2.2 $\mu\text{a}725$ 运算放大器相位裕度及其自动优化结果分析

图 4-17 展示了 GRASS 仿真器分析 $\mu\text{a}725$ 运算放大器相位裕度随着电路元件 GM8 参数改变得到的变化轨迹。图 4-17 更是进一步表明，GRASS 的符号化相位裕度分析与 Spice 分析结果几乎完全吻合。

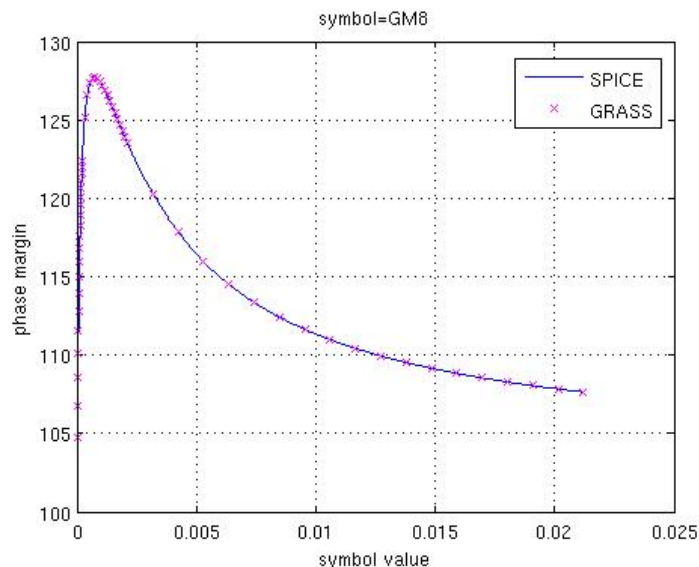


图 4-17 μ a725 相位裕度随 GM8 的变化曲线

Fig.4-17 Phase Margin Locus with GM8

假如我们希望改变电路元件 GM8 的值，将相位裕度趋近调整至 110 度。相位裕度自动优化算法将通过符号化提取和敏感度计算自动调整 GM8，使之从初值 $2.12e-3$ 调整至 $4.15e-5$ ，从而满足设计要求。我们将相位裕度自动优化后的电路参数重新代入 Spice 中进行相位裕度分析，得到在新的电路参数条件下的相位裕度为 110.01 度。经过参数调整后电路的相位裕度将得到优化，与此同时，优化前后的电路频率响应曲线也会产生相应的调整。对相位裕度进行优化后，电路的幅频特性曲线和相频特性曲线如图 4-18 所示。

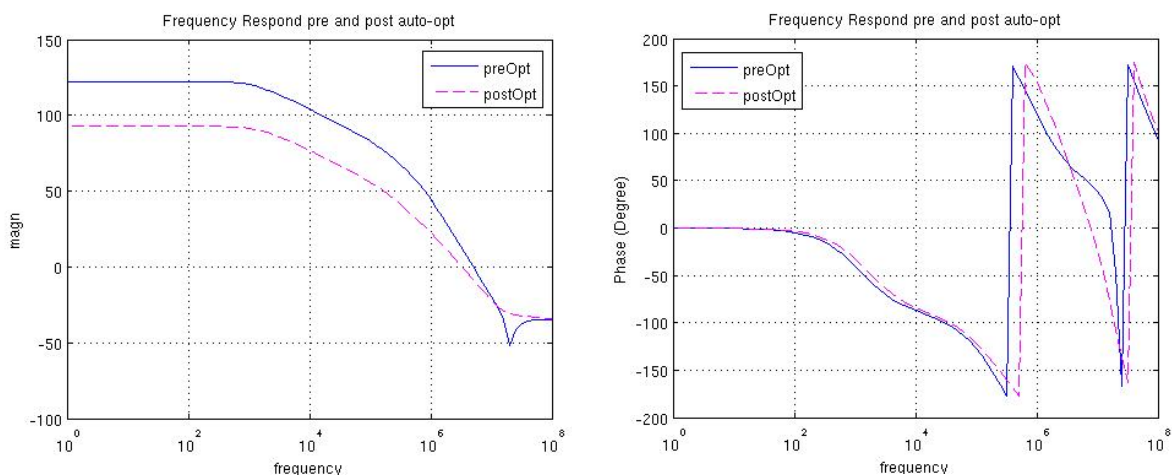


图 4-18 μ a725 优化前后的相频特性曲线图

Fig.4-18 Phase Curve preOpt and postOpt

根据电路参数调整时，将同时改变电路带宽和相位裕度这个特点，我们还可以得到如图 4-19 所示的曲线，其直观的显示了当改变电路元件 GM8 的值时，对系统带宽和相位裕度这两个电路性能产生的影响。

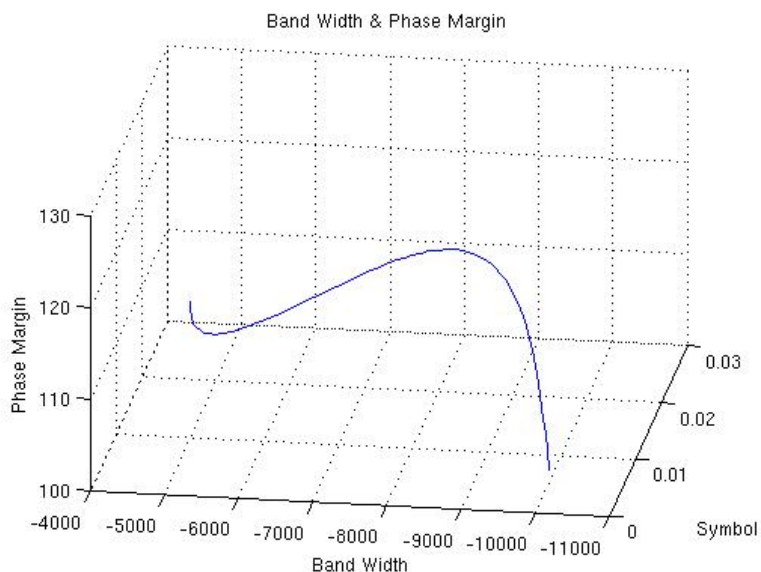


图 4-19 $\mu\text{a}725$ 电路参数、影响带宽和相位裕度的关系

Fig.4-19 Relationship between Symbol Value, Band Width and Phase Margin

4.3 米勒补偿三级运算放大器仿真结果分析

如图 4-20 所示的是带米勒补偿的三级运算放大器【25】。

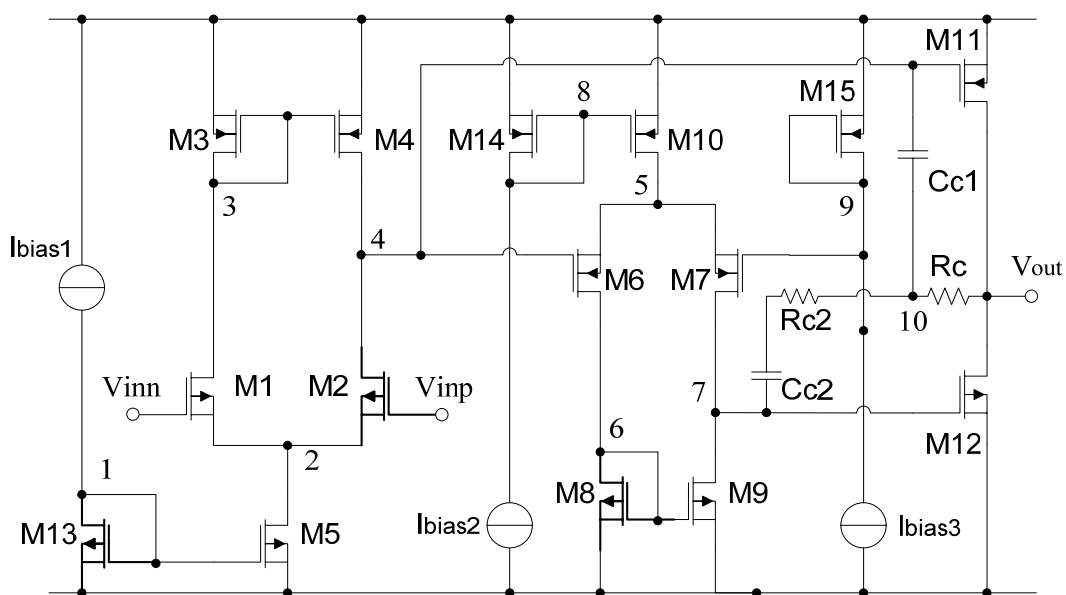


图 4-20 带米勒补偿的三级运放

Fig.4-20 Amplifier with Nested-Miller Compensation

4.3.1 米勒补偿三级运放带宽及其自动优化结果分析

在适当偏置下得到电路小信号模型的元件参数值，通过 GRASS 仿真器获得电路传递函数的符号化表示。采用矩匹配法对图 4-20 所示电路进行主极点分析，得到的主极点为 -1245.26rad/s ；传统的根分离法直接由分母多项式最低两次项系数之比 $-a_0/a_1$ 得到近似主极点，其值为 -1242.04rad/s ；而通过 Spice 零极点分析得到的主极点为 -1245.3rad/s 。以 Spice 结果为参考标准，矩匹配法提取的主极点精度远远高于传统的根分离方法。

若将主极点看成是电路元件 $Cc1$ 的函数，可得到主极点随该元件变化的曲线。实验电路的主极点随补偿电容 $Cc1$ 变化的根轨迹如图 4-21 所示。可以看出，主极点仅对于 $Cc1$ 参数的部分值变化明显，设计者可以根据这些信息适当选取电路的参数值。

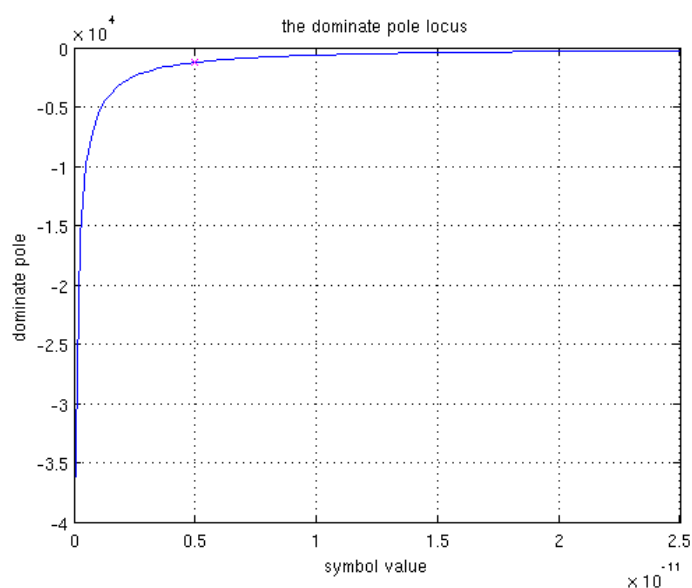


图 4-21 米勒补偿三级运放主极点随 $Cc1$ 的变化曲线

Fig.4-21 Locus of Dominant Pole with $Cc1$

假如我们希望改变电路元件 $Cc1$ 的参数，使主极点趋近 $-1e4\text{rad/s}$ 。主极点自动优化算法将通过符号化提取和敏感度计算自动调整该参数，使之从初值 5pf 调整至 0.49pf ，从而满足设计要求。我们将主极点自动优化后的电路参数重新代入 Spice 中进行零极点分析，得到在新的电路参数条件下的主极点为 -10003.4rad/s 。经过参数调整的电路带宽将得到优化，调整前后的电路频率响应如图 4-22 所示，我们看到明显的带宽增加。

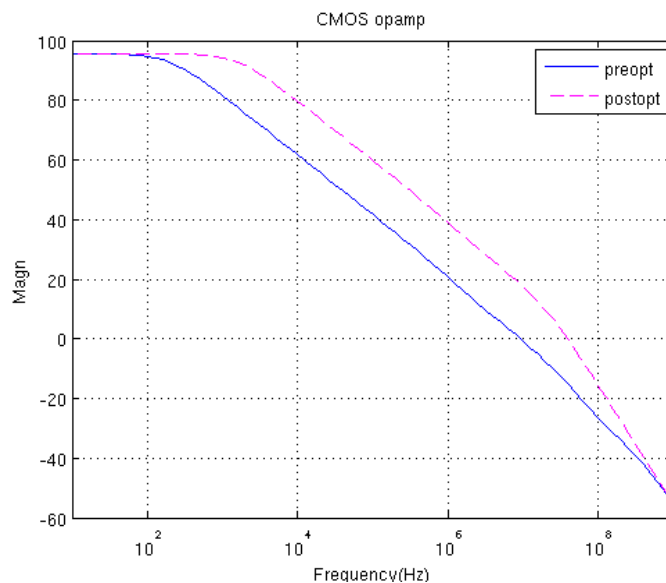


图 4-22 米勒补偿三级运放优化前后的幅频响应图

Fig.4-22 Frequency Response preOpt and postOpt

4.3.2 米勒补偿三级运放带宽及其自动优化结果分析

图 4-23 展示了 GRASS 仿真器分析米勒补偿三级运算放大器相位裕度随着电路元件 Cc1 参数改变得到的变化轨迹。

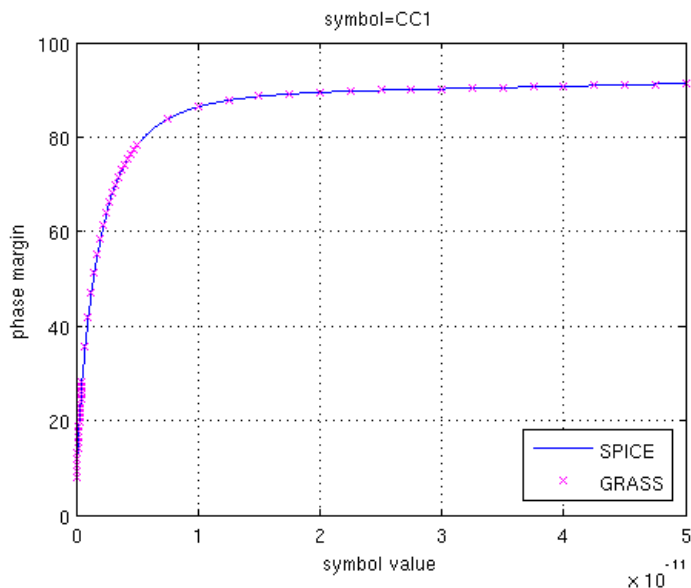


图 4-23 米勒补偿三级运放相位裕度随 Cc1 的变化曲线

Fig.4-23 Phase Margin Locus with Cc1

假如我们希望改变电路元件 Cc1 的值，将相位裕度趋近调整至 20 度。相位

裕度自动优化算法将通过符号化提取和敏感度计算自动调整 Cc1，使之从初值 5pf 调整至 0.28pf，从而满足设计要求。我们将相位裕度自动优化后的电路参数重新代入 Spice 中进行相位裕度分析，得到在新的电路参数条件下的相位裕度为 20.094 度。经过参数调整后电路的相位裕度将得到优化，与此同时，优化前后的电路频率响应曲线也会产生相应的调整。对相位裕度进行优化后，电路的幅频特性曲线和相频特性曲线如图 4-24 所示。

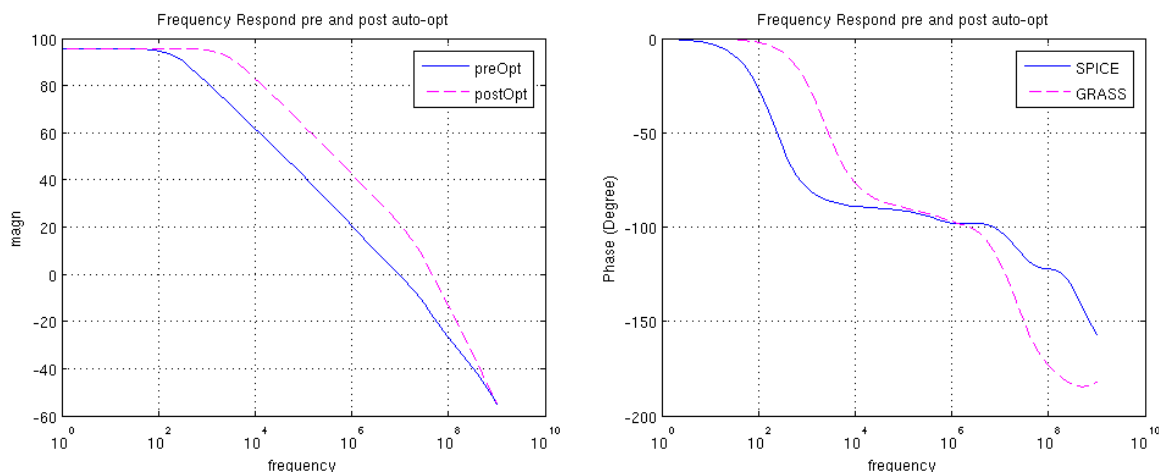


图 4-24 米勒补偿三级运放优化前后的相频特性曲线图

Fig.4-24 Phase Curve preOpt and postOpt

根据电路参数调整时，将同时改变电路带宽和相位裕度这个特点，我们还可以得到如图 4-25 所示的曲线，其直观的显示了当改变电路元件 Cc1 的值时，对系统带宽和相位裕度这两个电路性能产生的影响。

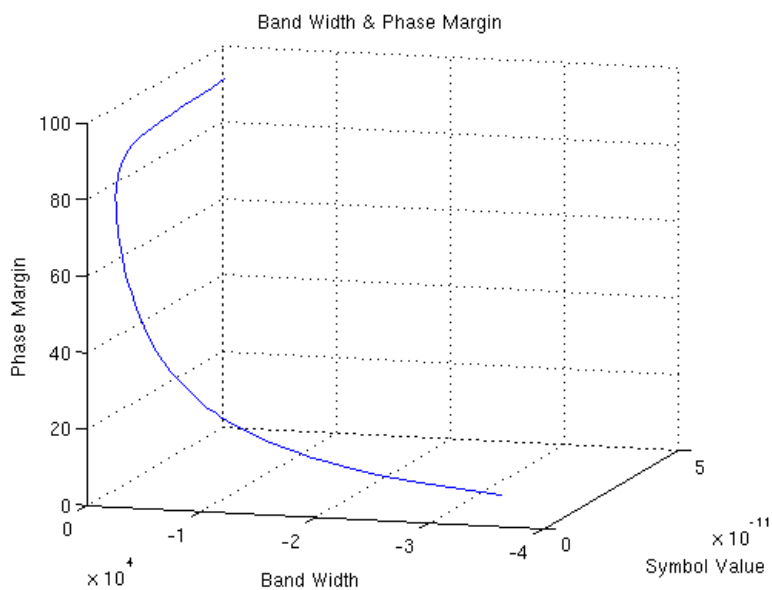


图 4-25 米勒补偿三级运放电路参数、影响带宽和相位裕度的关系

Fig.4-25 Relationship between Symbol Value, Band Width and Phase Margin

4.4 共源共栅运算放大器仿真结果分析

在本节中，将以 Cascode 结构的 CMOS 运算放大器电路为对象，分析验证 GRASS 仿真器的带宽和相位裕度自动优化功能。

共源共栅 CMOS 运算放大器电路如图 4-26 所示。

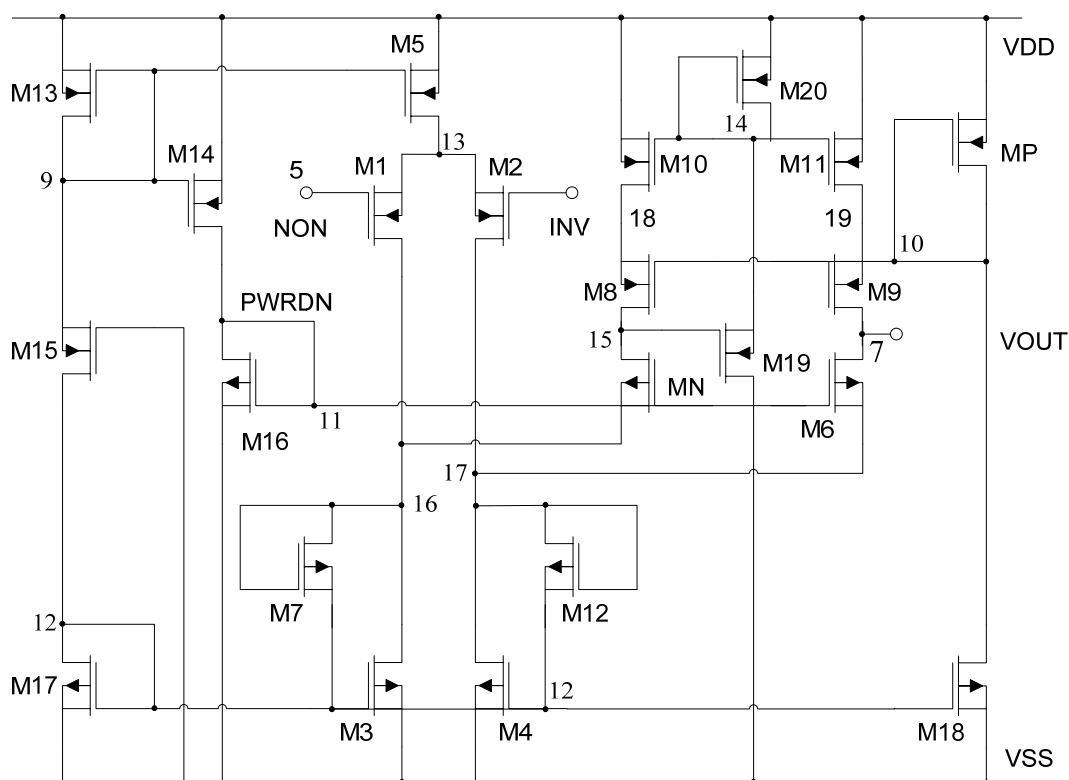


图 4-26 共源共栅 CMOS 运算放大器

Fig.4-26 Cascode CMOS Amplifier

4.4.1 共源共栅运算放大器带宽及其自动优化结果分析

GRASS 仿真器采用矩匹配法对图 4-26 所示电路进行主极点分析，得到的主极点为 $-1.026e7\text{rad/s}$ ；传统的根分离法直接由分母多项式最低两次项系数之比得到近似主极点，其值为 $-8.18286e6\text{rad/s}$ ；而通过 Spice 零极点分析得到的主极点为 $-1.05302e7\text{rad/s}$ 。若以 Spice 结果为参考标准，在使用矩匹配法对所有测试电路的主极点分析中，共源共栅 CMOS 运算放大器相对 SPICE 标准值的误差是最大的，为 2.56595%；然而，同一工作点使用根分离法分析得到的结果，相对误

差竟高达 22.2915%。因此，GRASS 的矩匹配法主极点符号化提取依然具备了良好的可靠性。

若将主极点看成是电路元件 GM4 的函数，可得到主极点随该元件变化的曲线。实验电路的主极点随补偿电容 GM4 变化的根轨迹如图 4-27 所示。

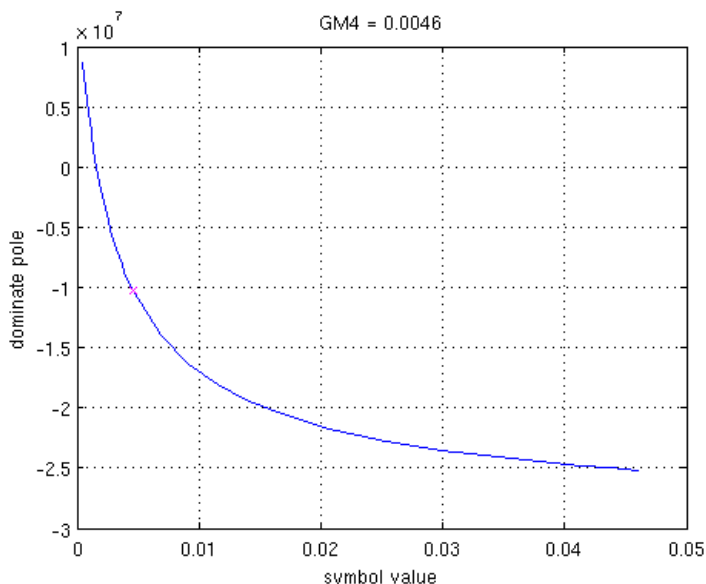


图 4-27 共源共栅运放主极点随 GM4 的变化曲线

Fig.4-27 Locus of Dominant Pole with GM4

假如我们希望改变电路元件 GM4 的参数，使主极点趋近 $-1.5e6\text{rad/s}$ 。主极点自动优化算法将通过符号化提取和敏感度计算自动调整该参数，使之从初值 $4.6e-3$ 调整至 $1.886e-3$ ，从而满足设计要求。我们将主极点自动优化后的电路参数重新代入 Spice 中进行零极点分析，得到在新的电路参数条件下的主极点为 $-1.5149e6\text{rad/s}$ 。经过参数调整的电路带宽将得到优化，调整前后的电路频率响应如图 4-28 所示，我们看到，随着带宽向着较窄的方向调整，系统的增益有了相应的提高，带宽和增益的变化趋势与图 4-16 中对 $\mu\text{a}725$ 运算放大器带宽的调整正好相反。

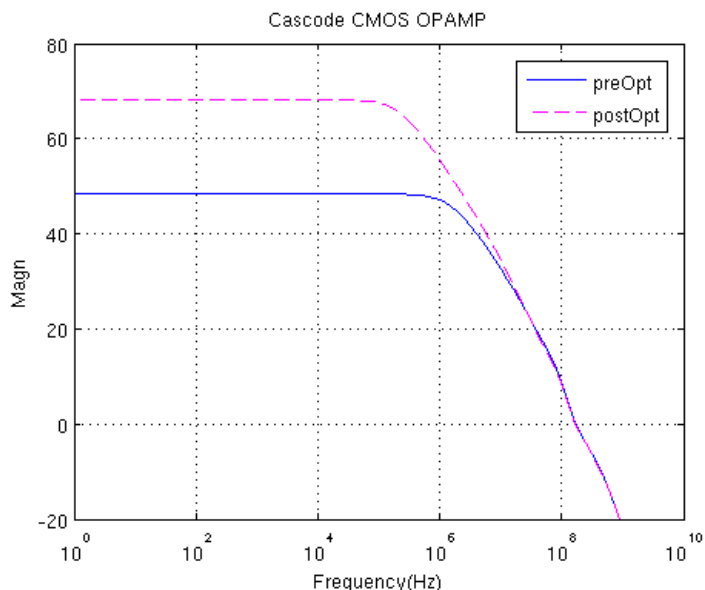


图 4-28 共源共栅运放优化前后的幅频响应图

Fig.4-28 Frequency Response preOpt and postOpt

4.4.2 共源共栅运算放大器带宽及其自动优化结果分析

图 4-29 展示了 GRASS 仿真器分析米勒补偿三级运算放大器相位裕度随着电路元件 GMP 参数改变得到的变化轨迹。

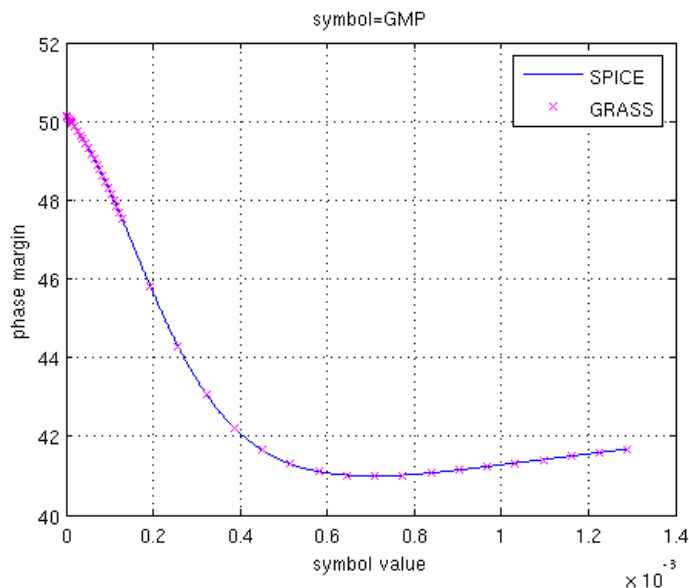


图 4-29 共源共栅运放相位裕度随 GMP 的变化曲线

Fig.4-29 Phase Margin Locus with GMP

假如我们希望改变电路元件 GMP 的值，将相位裕度趋近调整至 42 度。相位

裕度自动优化算法将通过符号化提取和敏感度计算自动调整 GMP，使之从初值 $1.29e-4$ 调整至 $4.0755e-4$ ，从而满足设计要求。我们将相位裕度自动优化后的电路参数重新代入 Spice 中进行相位裕度分析，得到在新的电路参数条件下的相位裕度为 42.789 度。经过参数调整后电路的相位裕度将得到优化，与此同时，优化前后的电路频率响应曲线也会产生相应的调整。对相位裕度进行优化后，电路的幅频特性曲线和相频特性曲线如图 4-30 所示。

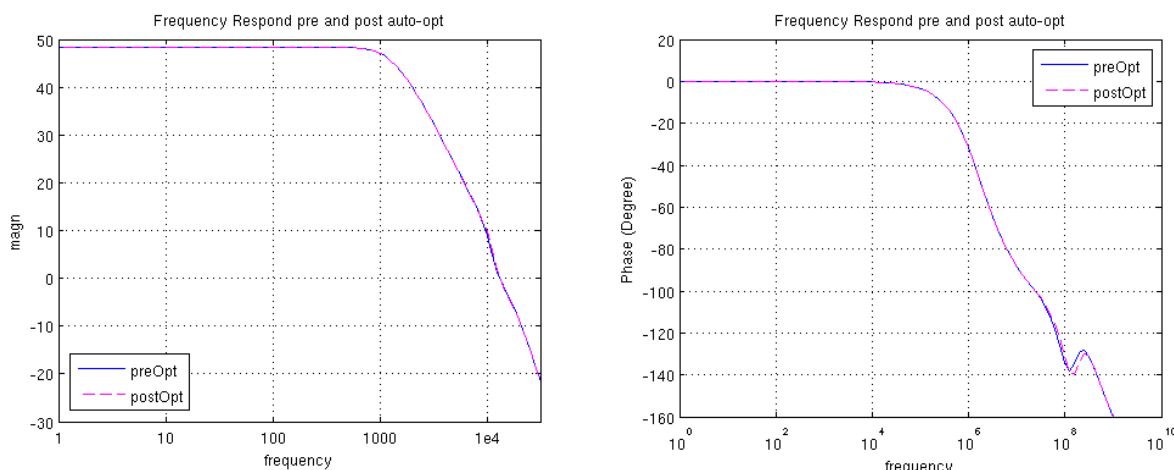


图 4-30 共源共栅运放优化前后的相频特性曲线图

Fig.4-30 Phase Curve preOpt and postOpt

根据电路参数调整时，将同时改变电路带宽和相位裕度这个特点，我们还可以得到如图 4-31 所示的曲线，其直观的显示了当改变电路元件 GMP 的值时，对系统带宽和相位裕度这两个电路性能产生的影响。

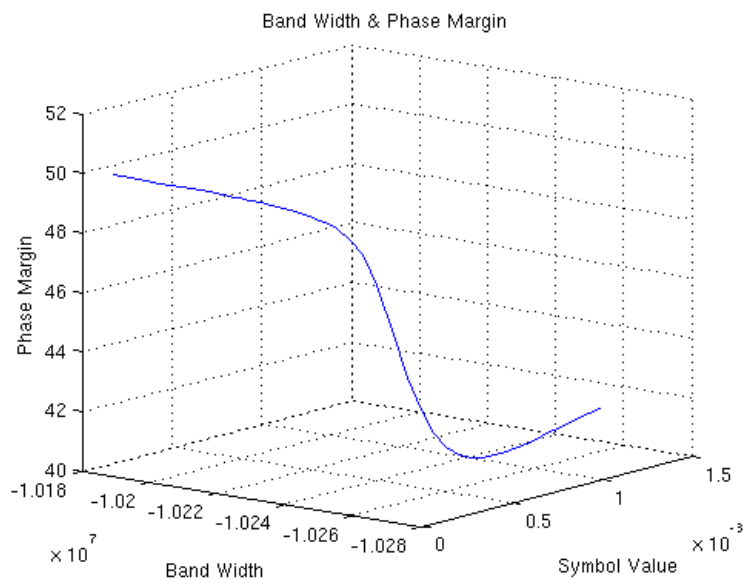


图 4-31 共源共栅运放电路参数、影响带宽和相位裕度的关系

Fig.4-31 Relationship between Symbol Value, Band Width and Phase Margin

4.5 本章小结

本章通过对一系列不同规模的基准电路进行仿真和分析，验证了第三章中提出的符号化带宽及相位裕度优化算法的正确性和可靠性。其中，以测试电路 $\mu\text{a}741$ 运算放大器为例，对 GRASS 仿真器在电路带宽和相位裕度性能上的符号化提取、灵敏度分析、自动优化等各方面的应用都进行了详尽的实验和分析；再通过 $\mu\text{a}725$ 运算放大器、带米勒补偿的三级运算放大器和共源共栅的 CMOS 运算放大器的符号化带宽自动优化和符号化相位裕度自动优化，进一步验证了本文提出的电路性能符号化分析方法的精确性，证明其在实际设计和应用的广泛意义。

第五章 总结与展望

5.1 主要结论

本文论述了模拟电路符号化带宽和相位裕度自动优化算法、实现及其在实际电路设计中的应用。该算法以基于电路拓扑结构的符号化模拟仿真器 GRASS 为研究基础,结合已有的仿真平台,对系统带宽和相位裕度等重要电路性能进行符号化提取和近似分析,通过合理的误差控制机制对电路参数进行自动优化以达到设计者提供的设计指标。

本文中介绍的符号化自动优化算法基于严格的数学推导和证明,通过对大量工程应用的设计实例进行仿真和分析,证明了其正确性和可靠性,即便在分析较大规模模拟电路(20~30个晶体管)时,算法的效率、时空复杂度都依然能够保持在一个合理的范围内。

符号化自动优化算法完全展现了符号化分析方法能够洞悉和预测电路特性变化趋势的特点,通过自动改变电路参数来满足设计要求,将模拟电路设计过程从对工程师经验的依赖和重复仿真中解脱出来,大大缩短了设计周期,降低了电路设计失败的风险,提高了模拟电路设计与优化的自动化程度。

5.2 研究展望

本文初步探索了电路符号化分析在系统带宽和相位裕度等电路主要性能方面的近似提取和优化方法,丰富了基于电路拓扑结构的模拟电路符号化仿真器 GRASS 对一定规模模拟电路的分析能力。未来,我们就此领域进行进一步的研究和讨论,以提供更多的设计提示、能够更加全面的揭示电路性能。

如本文提到的系统带宽分析,是从电路传输函数中通过矩匹配法提取出传输函数的主极点,从而近似的描述系统带宽。一方面,这种分析方法只适用于低通电路,对带通电路和高通电路频响曲线的刻画能力十分有限;另一方面,电路传输函数主极点的提取,某种程度上依赖于主极点与其它零极点之间的分离程度,因此,系统带宽的近似精度本质上是受电路所有零极点共同影响的。因此,探索一种能够进行完整的电路零极点分析的方法,可以大大完善 GRASS 仿真器对各

种电路类型的分析能力。

又如，在电路优化过程中，有时候需要同时调整多个电路元件的参数以最优组合实现设计要求。本文中简单介绍了多个电路参数对电路性能的影响和控制，但并未就其具体优化方法和实现进行详细论述。若对多参数协同优化方法进行研究，结合强大的图形界面，可以令设计者避免调整多个电路元件参数时对电路性能的重复仿真分析。

参 考 文 献

- [1] P. Wambacq, G. Gielen, and W. Sansen, "A cancellation-free algorithm for the symbolic simulation of large analog circuits," in Proc. Int'l Symposium on Circuits and Systems, pp. 1157-1160, 1992.
- [2] G. Gielen, P. Wambacq, and W. Sansen, "Symbolic analysis methods and applications for analog circuits: A tutorial overview," in Proceedings of the IEEE, vol. 82, pp. 287-303, Feb. 1994.
- [3] L. Chua and P. Lin, Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits: Algorithms and Computational Techniques. Englewood Cliffs, NJ: Rentice-Hall, 1975, ch. 14.
- [4] P. Lin, Symbolic Network Analysis. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier, 1991.
- [5] M. Hassoun and K. McCarville, "Symbolic analysis of largescale networks using a hierarchical signal flowgraph approach," in Kluwer .I. Analog Integrated Circuits and Signal Prnress, vol.3, no. 1, pp. 31-42, Jan. 1993.
- [6] G. Gielen, H. Walscharts and W. Sansen, "ISAAC: A symbolic simulator for analog integrated circuits," in IEEE J. Solid-State Circuits, vol. 24, no. 6, pp. 1587-1597, Dec. 1989.
- [7] A. Konczykowska and M. Bon, "Automated design software for switched-capacitor IC's with symbolic simulator SCYMBAL," in Proc. Design Automation Conference, pp. 363-368, 1988.
- [8] S. Seda, M. Degrauwe and W. Fichtner, "A symbolic analysis tool for analog circuit design automation," in Proc. International Conference on Computer Aided Design, pp. 488-491, 1988.
- [9] , "Lazy-expansion symbolic expression approximation in SYNAP," in Proc. International Conference on Computer Aided Design, pp. 31C317, 1992.
- [10] S. Manetti, "New approaches to automatic symbolic analysis of electric circuits," in Proc. Inst. Elec. Eng. pt. G, pp. 22-28, Feb. 1991.
- [11] L. Huelsman, "Personal computer symbolic analysis programs for undergraduate engineering courses," in Proc. ISCAS, pp. 798-801, 1989.
- [12] M. Hassoun and P. Lin, "A new network approach to symbolic simulation of large-scale networks," in Proc. IEEE International Symposium on Circuits and

Systems, pp. 806-809, 1989.

[13] F. Fernandez, A. Rodriguez-Vazquez and J. Huertas, "A tool for symbolic analysis of analog integrated circuits including pole/zero extraction," in Proc. European Conference on Circuit Theory and Design, pp. 752-761, 1991.

[14] G. Wierzba et al., "SSPICE-A symbolic SPICE program for linear active circuits," in Proc. Midwest Symp. on Circuits and Systems, 1989.

[15] A. G. J. MacFarlane, "Multivariable Nyquist-Bode and multivariable root-locus techniques," in Proc. IEEE Conf. Decision Control, pp. 342-347, 1976.

[16] Frank.P.M. and Eslami.M, "Introduction to System Sensitivity Theory," in IEEE Trans. on Systems, Man and Cybernetics, vol 10, pp. 337-338, Nov. 2007.

[17] G. Shi, W. Chen, and C.-J. R. Shi, "A graph reduction approach to symbolic circuit analysis," in Proc. Asia South-Pacific Design Automation Conference, Yokohama, Japan, Jan. 2007.

[18] W. Chen and G. Shi, "Implementation of a symbolic circuit simulator for topological network analysis," in Proc. Asia Pacific Conference on Circuits and Systems, Singapore, pp. 1327 - 1331, Dec. 2006.

[19] G. Shi and X. Meng, "Variational Analog Integrated Circuit Design via Symbolic Sensitivity Analysis," in International Symposium on Circuits and Systems, Taiwan, May 2009.

[20] S. B. Akers, "Binary decision diagrams," in IEEE Trans. Comput., vol. C-27, pp. 509-516, June 1976.

[21] W. Verhaegen and G. Gielen, "Efficient DDD-Based Symbolic Analysis of Linear Analog Circuits," in IEEE Tran. on Circuit and Systems - II: Analog and Digital Signal Processing, vol. 49, no. 7, pp. 474 - 487, July 2002.

[22] 龚谋达. 零点定理和介值定理. 中学物理教学参考, 2002, 31(10): 47-48.

[23] 李庆扬, 王能超, 易大义. 数值分析. 北京: 清华大学出版社, 2001: 262-264.

[24] O. Guerra, J. D. Rodri' Guez-Garci' A, F. V. Ferna' Ndez, et al., "A Symbolic Pole/Zero Extraction Methodology Based on Analysis of Circuit Time-Constants," in Analog Integrated Circuits and Signal Processing, vol. 31, pp. 101-118, 2002.

[25] G. Palumbo, S. Pennisi, "Design Methodology and Advances in Nested-Miller Compensation," in IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. 49, no. 7, pp. 893-903, 2002.

符号与标记（附录 1）

导纳 (Admittance)

阻抗 (Resistance)

电压控制电压源 (Voltage control voltage source, VCVS)

电流控制电压源 (Current control voltage source, CCVS)

电压控制电流源 (Voltage control current source, VCCS)

电流控制电流源 (Current control current source, CCCS)

零器 (Nullor)

零阻器 (Nullator)

泛阻器 (Norator)

主极点 (Dominant Pole, p_d)

相位裕度 (Phase Margin, PM)

致 谢

光阴似箭，岁月如梭，仿佛白驹过隙一般。初来乍到时的陌生和兴奋仍历历在目，却已然站在了校园生活的终点。回想两年半来的点点滴滴，才发现当所有的思绪和感受凝聚在一起时，心中存有如此多的感动和感激。

感谢我的导师施国勇教授。从论文选题、研究进展到论文结构安排和最后定稿，都离不开恩师的悉心指导和鼓励。古语有云：“师者，传道授业解惑者也”。先生渊博的学识，敏锐的学术洞察力，睿智缜密的思维，严谨踏实的治学态度和高尚的人格魅力，令我深深折服，终生难忘。还记得施老师与我们谈学术、谈做人，也记得施老师在我迷茫的时候为我指明研究方向、字斟句酌的为我修改学术论文，他对学术孜孜以求的精神、对学生无微不至的教诲，不仅是我研究生阶段的美好回忆，也将成为我最宝贵的人生财富。

感谢一直以来给予我无私帮助和支持的同窗好友，郝博、骥哥、小谢、陈安、谭焜元、王婷、陈硕，跟他们一起学习、交流与探讨，让我受益匪浅，他们精益求精的态度，是我学习的榜样。还有扎实肯干的穆静、自强不息的平平、心思细密的肖夷静和真诚乐天的杨玲，他们与我一起经历和体验着快乐与泪水、感动与成长，使我在思源湖畔度过的两年多姿多彩。

最后，要感谢父母一直以来含辛茹苦的养育和无私奉献，是他们给予了我健康的体魄和诚朴正直的品质，教会我“说好话，做好事，存好心”。家的温暖，永远是我在面对荆棘和坎坷时依然能够勇敢前行的动力。

最后一段文字跃然纸上，为我的研究生生涯画下句点，同时，亦都为我翻开了人生新的篇章。“长风破浪会有时，直挂云帆济沧海”，我将加倍努力，坚定、踏实的迈向新的旅途。