

上海交通大学硕士学位论文

树状电路信号完整性符号化分析方法与应用<sup>1</sup>

学    校：上海交通大学  
院    系：微电子学院  
专    业：软件工程

上海交通大学微电子学院  
2008年12月

---

<sup>1</sup> 此研究由上海市浦江人才基金资助(No. 07pj14053)

**A Dissertation Submitted to Shanghai Jiao Tong University  
For Master Degree**

**A SYMBOLIC APPROACH TO THE SIGNAL  
INTEGRITY OF MULTI-COUPLED RLC TREE  
CIRCUITS WITH APPLICATION**

**Specialty: Software Engineering**

School of Microelectronics  
Shanghai Jiao Tong University  
Shanghai, P.R.China  
December 30, 2008

# 上海交通大学

## 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：

日期： 年 月 日

# 上海交通大学

## 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权上海交通大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密 ，在\_\_\_年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密 。

(请在以上方框内打“√”)

学位论文作者签名：

指导教师签名：

日期： 年 月 日

日期： 年 月 日

# 树状电路信号完整性符号化分析方法应用

## 摘要

当集成电路互连的尺寸不断缩小，互连的寄生电感、互连间的耦合电容和互感效应越来越明显，对芯片上的信号完整性提出了更加苛刻的要求。RLC 树状电路的信号传输特性可以利用电路的高阶矩来描述，电路的矩可以通过数值递归算法和符号化方法求得。而基于矩决策图的符号化求解算法利用了决策图的共享特性，将大规模电路的矩进行符号化表示。

本文首先介绍了互连线的基本模型和信号完整性分析的意义。接着在阐述模型降阶基本原理的基础上，从基于矩匹配的模型降阶算法入手，推导了基于电路拓扑结构的耦合 RLC 树状电路矩的计算方法。本文在单棵 RLC 树状电路矩的符号化算法基础上，通过引入耦合电容和互感，利用电源分割理论，提出了多耦合 RLC 树状电路矩的符号化算法，该算法通过构造与电路拓扑结构等效的矩决策图实现了矩的符号化存储和计算，具有形式简单，高效和易于多次计算的特点。在此基础上，结合模型降阶算法，本文还构造了一个耦合 RLC 树状电路的符号化仿真器，并利用该仿真器对耦合互连线的信号完整性进行了仿真和研究。

关键词：矩，矩决策图，模型降阶，符号化，耦合电容，互感，信号完整性

## A SYMBOLIC APPROACH TO THE SIGNAL INTEGRITY OF MULTI-COUPLED RLC TREE CIRCUITS WITH APPLICATION

### ABSTRACT

Since the minimum feature size of interconnect in integrated circuit (IC) scales down rapidly, parasitic inductance, capacitive and inductive coupling issues are becoming more and more important; however, they are critical for signal integrity (SI) analysis in the contemporary IC design. The signal characteristics of tree-structured circuits can be described by high order voltage moments which can be computed recursively using numerical or symbolic algorithms. The symbolic moment calculator is based on moment decision diagram (MDD) which can represent the recursive moment computation process effectively by taking the advantage of data sharing in the decision diagram.

This paper first introduces the model of interconnect and the significance of signal integrity analysis. After briefly introducing several classical model order reduction algorithms, we proposed a moment calculation principle for multi-coupled RLC tree-structured circuits based on circuits' topology, which is derived from moment match algorithms. Then, taking capacitive and inductive coupling into consideration, this paper proposed a symbolic moment calculator for multi-coupled RLC tree-structured circuits by using source splitting technique. This algorithm represented and memorized the recursive moment computation formulas by a computation diagram named the MDD, which has a simple structure and improves repeatedly moment computation efficiency. In this paper, we also proposed a symbolic interconnect simulator suitable for variational analysis as an alternative to the numerical computation. In particular, the new methodology is used for variational crosstalk analysis.

**KEYWORDS:** Moment, Moment Decision Diagram, Model Order Reduction, Symbolic, Capacitive Coupling, Inductive Coupling, Signal Integrity

## 目 录

树状电路信号完整性符号化分析方法与应用.....	1
树状电路信号完整性符号化分析方法应用.....	I
摘 要.....	I
ABSTRACT .....	II
目 录.....	IV
图片目录.....	VI
表格目录.....	VIII
符号说明.....	IX
<b>1 绪论.....</b>	<b>- 1 -</b>
1.1 引言.....	- 1 -
1.2 互连线的模型及其研究.....	- 2 -
1.2.1 互连线的集总模型.....	- 2 -
1.2.2 互连线的传输线模型.....	- 3 -
1.2.3 互连线的尺寸缩小效应.....	- 4 -
1.2.4 以互连线为中心的设计流程.....	- 6 -
1.3 互连线的信号完整性.....	- 7 -
1.3.1 互连线延迟时间.....	- 8 -
1.3.2 互连线间的串扰.....	- 9 -
1.3.3 串扰估计的一般方法.....	- 11 -
1.4 本文的主要研究内容及安排.....	- 13 -
<b>2 耦合 RLC 树状电路的模型降阶.....</b>	<b>- 15 -</b>
2.1 模型降阶的基本原理.....	- 15 -
2.1.1 模型降阶算法介绍.....	- 15 -
2.1.2 模型降阶基本思想.....	- 16 -
2.2 基于矩匹配的模型降阶算法.....	- 17 -
2.2.1 矩的定义.....	- 17 -
2.2.2 矩的匹配.....	- 18 -
2.2.3 矩的计算.....	- 26 -
2.2.4 模型降阶.....	- 36 -
2.3 本章小结.....	- 39 -
<b>3 矩的符号化计算方法.....</b>	<b>- 40 -</b>



3.1	基于矩决策图的矩符号化计算方法	- 40 -
3.1.1	矩决策图	- 40 -
3.1.2	矩决策图的构造方法	- 41 -
3.1.3	k 阶矩的计算方法	- 42 -
3.1.4	耦合的实现	- 43 -
3.2	基于矩决策图的符号化仿真器	- 45 -
3.2.1	符号化仿真器的结构	- 45 -
3.2.2	网表的解析	- 45 -
3.2.3	矩决策图的构造	- 48 -
3.2.4	矩的求解算法	- 49 -
3.3	本章小结	- 50 -
4	矩符号化算法在串扰分析中的应用	- 51 -
4.1	矩符号化仿真器的性能测试	- 51 -
4.2	基于矩符号化仿真器的串扰分析	- 55 -
4.3	本章小结	- 58 -
5	总结	- 59 -
	参 考 文 献	- 61 -
	附录一 GRAM-SCHMIDT 正交化	- 64 -
	致 谢	- 66 -
	攻读硕士学位期间已发表或录用的论文	- 67 -

## 图片目录

图表 1 互连线的集总 (RC/RLC) 模型.....	- 3 -
图表 2 有损传输线.....	- 4 -
图表 3 互连线的平板电容模型.....	- 5 -
图表 4 传统 VLSI 的设计流程.....	- 6 -
图表 5 以互连线为中心的设计流程.....	- 7 -
图表 6 两相邻耦合互连示意图.....	- 9 -
图表 7 耦合串扰导致信号延时.....	- 10 -
图表 8 耦合串扰导致信号逻辑错误.....	- 10 -
图表 9 几种常用的分析耦合互连串扰噪声的模板电路.....	- 12 -
图表 10 耦合 RLC 互连集总模型.....	- 13 -
图表 11 RLC 树状电路.....	- 19 -
图表 12 耦合 RLC 树状电路.....	- 22 -
图表 13 替换电感电容为特定的独立源.....	- 27 -
图表 14 更新独立源的值.....	- 27 -
图表 15 RLC 树状电路的拓扑结构.....	- 30 -
图表 16 耦合电容的矩模型.....	- 31 -
图表 17 耦合电感的矩模型.....	- 31 -
图表 18 去耦合后的 RLC 树状电路.....	- 32 -
图表 19 耦合 RLC 树中的传输线.....	- 33 -
图表 20 耦合 RLC 树分布传输线的矩模型.....	- 36 -
图表 21 与 RLC 树等价的 RC 树.....	- 41 -
图表 22 电容树 CTree.....	- 41 -
图表 23 矩决策图, $R_j^l$ 的实线箭头表示它的“Then”边, 虚线箭头表示他的“Else”边.....	- 42 -

图表 24 矩计算示意图.....	- 43 -
图表 25 耦合 RLC 树状电路的矩决策图.....	- 44 -
图表 26 符号化仿真器结构.....	- 45 -
图表 27 m_EdgeMap 结构示意图.....	- 46 -
图表 28 m_AdjList 和 m_LEdgeMap 结构示意图.....	- 47 -
图表 29 m_CoefMap 结构示意图.....	- 47 -
图表 30 平行耦合（电容）互连线降阶模型输出波形.....	- 54 -
图表 31 平行耦合（电感）互连线降阶模型输出波形.....	- 55 -
图表 32 串扰随驱动电源内阻的变化.....	- 56 -
图表 33 串扰随耦合电容的变化.....	- 57 -
图表 34 串扰随互感的变化.....	- 57 -

## 表格目录

表格 1 导线按比例理想缩放特性 .....	- 5 -
表格 2 RLC 树状电路的测试结果 .....	- 51 -
表格 3 RC 树状电路的测试结果 .....	- 52 -
表格 4 耦合 RLC 树状电路的测试结果 .....	- 52 -
表格 5 不同最大扇出的 RLC 树状电路的测试结果 .....	- 53 -

## 符号说明

$T_i$	第 $i$ 棵 RLC 树, $Root(i)$ 为 $T_i$ 的根节点
$N^i$	第 $i$ 棵 RLC 树的输出节点个数
$n_j^i$	第 $i$ 棵 RLC 树的第 $j$ 个节点
$C_{j0}^i$	连接 $n_j^i$ 节点和地的电容
$C_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}$	节点 $n_{j_1}^{i_1}$ 与节点 $n_{j_2}^{i_2}$ 之间的耦合电容
$CC_j^i$	连接 $n_j^i$ 的所有耦合电容
$R_j^i$ 和 $L_j^i$	电容 $C_{j0}^i$ 所对应的支路电阻和支路电感
$PR_j^i$ 和 $PL_j^i$	$Root(i)$ 到 $n_j^i$ 路径上的所有电阻和电感
$CD_j^i$	$n_j^i$ 点下游的所有电容
$K_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}$ 和 $M_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}$	$L_{j_1}^{i_1}$ 和 $L_{j_2}^{i_2}$ 之间的互感系数和互感, 其中 $M_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} = K_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} \sqrt{L_{j_1}^{i_1} L_{j_2}^{i_2}}$
$ML_j^i$	与电感 $L_j^i$ 耦合的所有互感
$m_{C_j^i}(k)$ 和 $m_{L_j^i}(k)$	电容 $C_j^i$ 和电感 $L_j^i$ 的对应的 $k$ 阶矩

# 1 绪论

## 1.1 引言

随着超大规模集成电路 (VLSI) 技术的不断发展, 芯片的工作频率越来越高, 而其特征尺寸却越来越小。互连线的数量随着晶体管的增加而大规模增长。由于芯片面积受到物理互连面积的限制, 互连线尺寸随着器件按比例缩小<sup>[1]</sup>。同时, 为了提供更多的布线资源, IC 设计使用多层布线。这些因素将导致互连问题的出现, 包括互连延迟和信号完整性, 这不仅增加了设计上的复杂的, 更对验证和仿真提出了巨大的挑战。

首先, 我们知道, 当工艺尺寸逐渐不入深亚微米后, 寄生参数效应将变得更加明显, 不仅是互连线间的耦合电容, 由于频率的提高, 寄生电感, 甚至导线间的互感也体现了出来, 对芯片上的信号完整性提出了更加苛刻的要求。不考虑有缘器件, 仅从互连线的角度看, 传统的 RC 模型已经不能胜任了, 取而代之的是 RLC、RLCM 等更加精确的模型。除了最常见的耦合串扰问题, 影响信号完整性的还有 IR Drop, Ringing 等, 这都要求在芯片验证时提供更加复杂的模型。

其次, 除了对仿真模型的复杂性提出要求外, 还对仿真的规模提出了更高的要求。这不仅因为芯片集成的器件增多, 而且由于集成度增加后, 布线的长度会比从前更长, 从而需要用分布互连线模型才能够描述。对于非常高的频率, 甚至需要用传输线模型。由于寄生参数也是不得不考虑的因素, 这也增加了仿真的规模。这使得直接利用传统的仿真工具如 SPICE, 无论是在仿真时间还是在内存开销都已经不能满足需要了。

为了解决以上着两个问题, 必须有一种方法, 能够保证仿真的精度, 又能够把仿真的规模缩小到能够接受的程度。其中模型降阶技术是近几十年来研究的一个热点。模型降阶技术实际上在很早以前就已经被应用在控制领域了, 为的是解决大规模状态空间的求解问题。这一方法被引入到电路领域是自 1990 年 L.T. Pillage 首次提出渐进波形求值算法 (Asymptotic waveform evaluation, AWE)<sup>[2]</sup>以后。除此之外, 还有利用传输线的物理特征的行波松弛近似技术<sup>[3, 4]</sup>以及行波的传输线建模技术 (Traveling-wave-based waveform approximation, TWA)<sup>[5, 6]</sup>。其中的一些方法已经用在了工业用 EDA 工具中, 推动了微电子技术向更小的特征尺寸前进的步伐。

## 1.2 互连线的模型及其研究

由导线引起的寄生效应所显示的尺寸缩小特性并不与晶体管等有源器件相同，随着器件尺寸的缩小和电路速度的提高，它们变得非常重要，事实上它们已经开始支配数字集成电路一些相关的特性指标，如速度、能耗和可靠性。这一情形会由于工艺的进步而更加严重，因为后者可以经济可行地生产出更大尺寸的芯片，从而加互连线的平均长度及相应的寄生效应。因此深入研究分析半导体工艺中互连线的作用和特性是必要且重要的。

### 1.2.1 互连线的集总模型

一条导线的电路寄生参数是沿它的长度分布的，因此不能把它及总在一点上。然而当只有一个寄生元件占支配地位时，当在这些寄生元件之间的相互作用很小或者当只考虑电路特性的一个方面是，把各个不同的元件（寄生元件）部分集总成单个的电路元件常常是很有用的。

#### RC 树模型

如果不考虑导线的寄生电感和导线间的耦合效应。互连线模型的拓扑结构可以用 RC 树来表示。其中的电容为对地电容，不含非接地点之间的电容和对地的电阻。这里电路以 Thevenin 等效电压源作为驱动，以线性电容作为负载。

#### RLC 树模型

当电路的开关速度足够快，并且互连材料的质量变得足够好而使导线的电阻保持在一定范围内时，导线的电感将开始支配延时特性。这时，RLC 树模型就为估计由电感效应引起的延迟、震荡和过冲提供了模型。文献<sup>[7]</sup>通过引入环路电感（Loop Inductance）理论，并对返回路径做了假设，实现了对 RLC 树的建模。

同样，在 RLC 树模型的基础上，我们还可以考虑耦合电容，互感等效应，对互连进行更加精确的建模。但同时电路的复杂性也随之提高。一个考虑互连线寄生电容、电阻和电感以及耦合电容的完整互连线模型如图 1 所示。

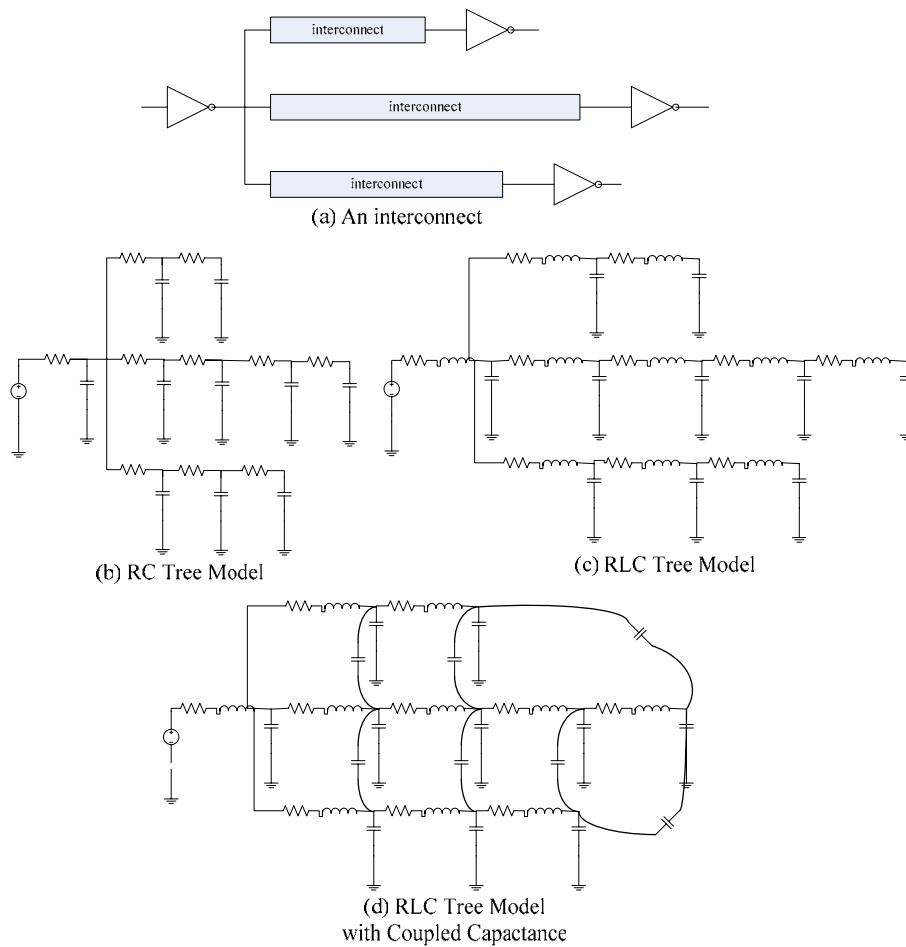


图 表 1 互连线的集总 (RC/RLC) 模型

Fig. 1 Interconnect Lumped (RC/RLC) Model

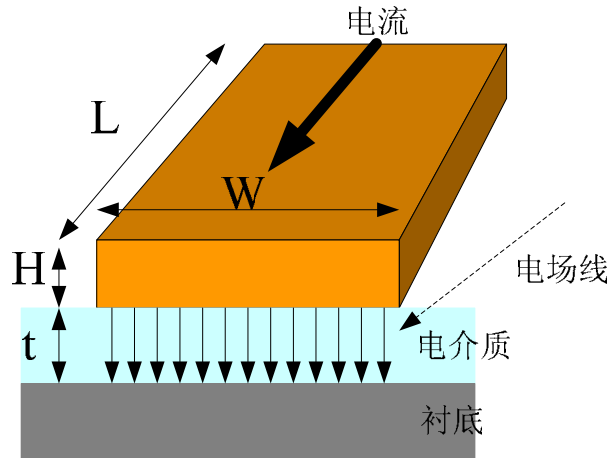
### 1.2.2 互连线的传输线模型

当信号的上升和下降时间变得可与信号波形“飞跃”导线的时间 (有光速决定) 相比拟时, 必须考虑导线的传输线效应。

与互连线的电阻和电容一样, 电感也是分布在整个导线上的。一条导线的分布 rlc 模型称为传输线模型, 它已经成为导线确切特性的最精确近似。传输线的基本性质是信号以波的形式传播通过互连介质。这不同于分布 rc 模型, 在分布 rc 模型中信号是按扩散方程的规律从源端“扩散”至目的地。在波动模式中, 信号的传播是通过交替地使能量从电场传送到磁场, 或者等效的说, 从电容模式转变成电感模式。







图表 3 互连线的平板电容模型

Fig. 3 Plate capacitor model of interconnect

因此我们研究导线长度按比例变化的特性时，必须区分是局部还是全局导线。我们考虑三种模型：局部导线（ $S_L = S > 1$ ）、恒定长度导线（ $S_L = 1$ ）及全局导线（ $S_L = S_C < 1$ ）。现在假设互连结构导线的的所有其他尺寸（ $W$ 、 $H$ 、 $t$ ）都按工艺缩小因子  $S$  缩小，由此可以得到表 1 所示的导线按比例变化的特性。

表格 1 导线按比例理想缩放的特性

Table 1 The ideal characteristics of interconnect proportional scaling

参数	关系	局部导线	长度不变	全局导线
$W$ 、 $H$ 、 $t$		$1/S$	$1/S$	$1/S$
$L$		$1/S$	1	$1/S_C$
$C$	$LW/t$	$1/S$	1	$1/S_C$
$R$	$L/WH$	$S$	$S^2$	$S^2/S_C$
$RC$	$L^2/Ht$	1	$S^2$	$S^2/S_C^2$

由表 1 可见，工艺尺寸的缩小并不见小导线的延时（如从时间常数只能够反映出的那个样）。对局部导线是延时不变，而全局导线的延时则每年增加 50%（当  $S = 1.15$  及  $S_C = 0.94$  时）。

#### 1.2.4 以互连线为中心的设计流程

传统 VLSI 的自上向下 (Top-Down) 设计流程如图 4 所示, 其中前端设计和后端物理设计是分离的, 互连线的寄生效应只有在后端版图预布局完成后才能准确的估计。

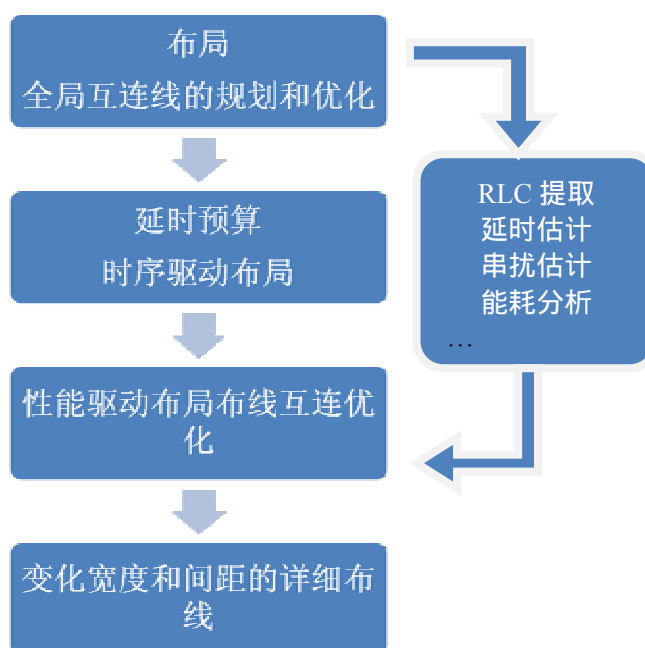


图表 4 传统 VLSI 的设计流程

Fig. 4 Traditional Design flow of VLSI

由于互连线的性能直接影响着集成电路系统的性能, 高性能集成电路芯片要求有高可靠的互连技术。互连的设计问题主要涉及以下几个方面: 电学问题、布局问题和热学问题。随着高速和小尺寸 VLSI 的发展, 电感效应不仅体现在封装及互连。在进行互连线设计的过程中, 需要考虑互连线的电阻、电容、电感、电导、特征阻抗、传输延时、衰减及串扰等主要电学参数, 而这些参数与介质本身的特性, 介质的厚度、所采用互连线的线宽、线厚、线长等结构要素有关。同时, 系统布局布线中, 时钟频率、功耗、芯片面积、布通率、分布均匀程度等目标因子往往相互矛盾, 必须进行综合考虑, 权衡利弊。

集成电路的设计已由原来以逻辑为中心的模式转变为逻辑与互连性能并重的模式, 设计的重点也逐渐由前端向后端转移。以互连为中心的物理设计流程如图 5 所示。



图表 5 以互连线为中心的设计流程

Fig. 5 The interconnect-centered design flow of VLSI

### 1.3 互连线的信号完整性

随着集成电路领域芯片加工工艺技术向深亚微米领域发展，特征尺寸变得越来越小，互连线的耦合电容、电感对电路的影响越来越大，如何正确分析这些寄生参数对于整个电路所起的影响成为了众多电路设计人员不可回避的问题。从广义上讲，信号完整性指的是在高速产品中由互连线引起的所有问题。它主要研究互连线与数字信号的电压电流波形相互作用时其电气特性参数如何影响产品的性能。所有这些问题分为以下三种影响和后果：

1. 时序
2. 噪声
3. 电磁干扰 (EMI)

电路的功能性是通过时钟信号的产生以及它们在遍布整个芯片的存储单元上的分布实行某些严格限制来保证的，违背这些限定常常会使功能出错。时序主要表现为延迟，它是指信号在导线上以有限的速度传输，信号从发送端到接收端期间存在一个传输延迟。信号的延迟会对系统的时序产生影响，在高速数字系统中，传输延迟主要取决于导线的长度和导线周围介质的介电常数。

同时，如振铃 (Ringing)、反射 (Reflection)、近端串扰 (Near-end Crosstalk)、

开关噪声(Switch Noise)、非单调性(Non-Monotonic)、地弹(Ground Bounce)、电源反弹(Power Bounce)、衰减(Attenuation)、容性负载(Capacitive Load)等噪声问题,也会对数字信号波形造成不同影响。当传输线的特征阻抗与负载阻抗不匹配时,信号到达接收端后有一部分能量将沿着传输线反射回去,使信号波形发生畸变,甚至出现信号的过冲(Overshoot)和下冲(Undershoot),信号如果在传输线上来回反射,就会产生振铃和环绕振荡。由于任何两个器件或导线之间都存在互容(Coupling Capacitance)和互感(Mutual Inductance),当一个器件或一根导线(Aggressor Nets)上的信号发生变化时,其变化会通过互容和互感影响其他器件和导线(Victim Nets),即串扰。串扰的强度取决于器件的几何尺寸和相互距离。当众多数字信号同步进行切换时(如CPU的数据总线、地址总线等),由于电源线和地线上存在阻抗,会产生同步切换噪声,在地线上还会出现地平面反弹噪声(地弹)。另外,还有电磁兼容问题,其产生主要与导线和器件的布局布线方式有关。

### 1.3.1 互连线延迟时间

在微电子电路中,特征尺寸按比例缩小在提高电路性能和减小芯片单位功能成本,以及提高产量方面颇见成效。电路速度的增长主要是由于晶体管门长度的减小使开关速度提高。当尺寸缩小到亚微米时,由互连线较高RC乘积引起的信号运行延迟将超过由于门长度减小所带来的利益。此外,随着电路几何尺寸的缩小,电路的本征延迟也因金属互连线电阻的增加和互连的电容效应而增长。更多器件和功能的集成,导致了芯片尺寸的增大和互连结构的更加复杂,使芯片面积不能充分利用,造成芯片面积增大和成本增加。为了充分利用面积,多层互连并用通孔连接的结构出现了。当系统和功能继续复杂下去,硅集成电路势必更复杂。为了充分利用面积,降低成本,势必需要更多层互连。因此即使工艺和设计能跟得上,复杂性的增加,互连成本仍会继续增加(但是,系统的成本会继续降低)芯片尺寸的增加必然需要更长的全局互连线,只有当线长与设计规则成比例时才能计算RC延时。随着芯片几何尺寸的缩小,互连延时的比重越来越大。另外,长的互连延时也阻止了总连线最小设计原则的利用。因此,技术发展的趋势为:

- 互连线延时显然已经成为电路性能电路性能的关键。尽可能的优化互连延时已经成为提高工作频率的必要环节。
- 相邻互连线之间的耦合电容将成为总电容中的主要成分,因为金属线的纵横比不断增大而线间的间隔不断缩小,但是耦合电容的值受线间隔的影响很大。因此合理的设置线间隔对超深亚微工艺下互连线的设计是很重要的。
- 相邻互连线间的耦合噪声在深亚微米工艺的设计中将成为重要因素,因为电容耦

合变大了。

### 1.3.2 互连线间的串扰

串扰是信号完整性问题之一，它是指有害信号从一个网络转移到相邻网络。任何一对网络之间都存在串扰，我们通常把噪声元所在的网络称为动态网络或攻击网络，而把有噪声产生的网络称为静态网络或受害网络。

互连之间的串扰噪声已成为高性能VLSI失效的主要原因。在深亚微米集成电路设计中由于干扰线横向尺寸缩小而纵向尺寸不变，这种情况更加明显。相邻互连间耦合电容大于接地电容。对于强耦合系统，互连的状态强烈依赖于与之相邻互连的状态。干扰线互连的状态会影响被干扰线互连的状态。

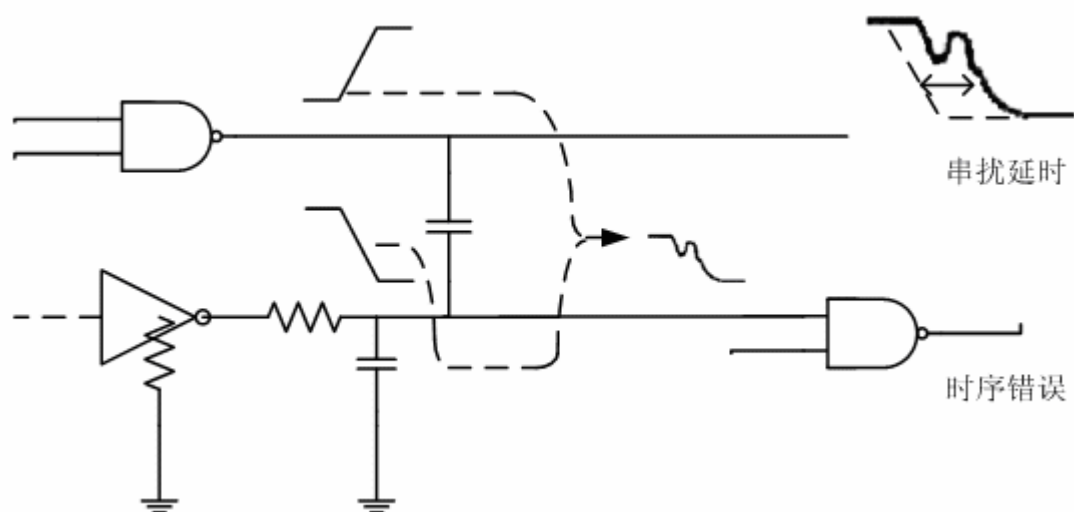


图表 6 两相邻耦合互连示意图

Fig. 6 Schematic of two coupled interconnects

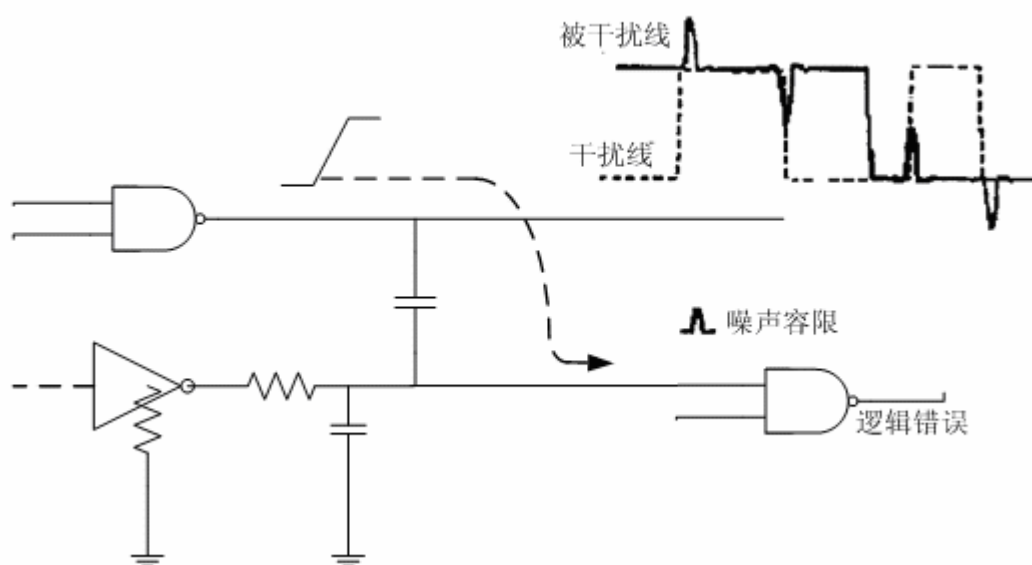
如图 6 所示，互连线 1 为干扰线，互连线 2 为被干扰线。输入端点 1 的  $V_{in}$  为上升沿或下降沿信号，而端点 2 的固定电平为低电平或高电平。

深亚微米互连之间的耦合串扰不仅会导致信号延时，严重时还会导致信号逻辑错误，如图 7 和图 8 所示。串扰导致的延时是时序不稳定的一个主要原因，其影响程度远大于工艺变化和器件缩小的影响。



图表 7 耦合串扰导致信号延时

Fig. 7 Crosstalk leads to signal delay



图表 8 耦合串扰导致信号逻辑错误

Fig. 8 Crosstalk leads to logic error

从以上分析可以看到,芯片内部和芯片之间的互连线在决定一个数字系统的物理尺寸,功耗以及时钟树频率方面起着越来越重要的作用。特别是由于深亚微米工艺技术和芯片集成,圆片集成技术的出现,使得芯片上或圆片上高密度互连线的寄生参数,如电阻,电容,电感以及由此引起的信号传播延时和信号串扰等信号完整性

问题已经成为设计高速超大规模集成电路的一个主要考虑因素。

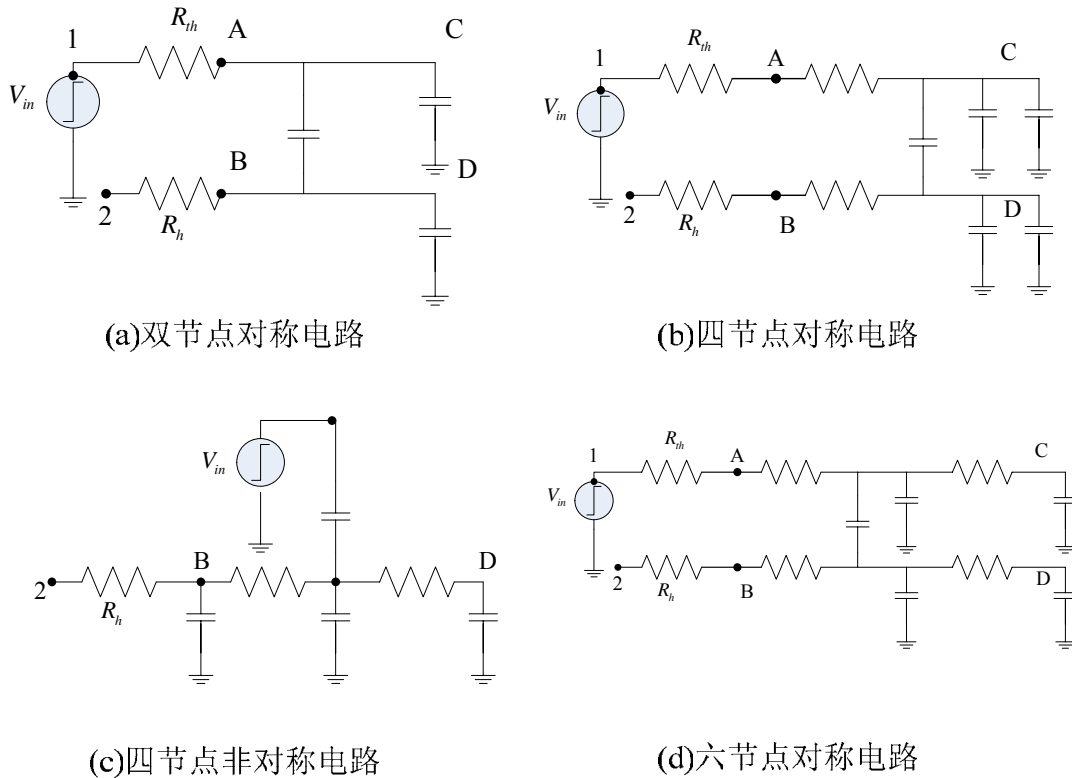
### 1.3.3 串扰估计的一般方法

对于复杂的VLSI芯片来说,由于耦合互连的规模较大,采用SPICE模拟的方法并不实际。改进串扰噪声分析的有效性,提出了很多新颖的分析方法。根据精确性和有效性的折衷,方法可以分为两大类。第一类方法在保证速度优于标准SPICE工具的前提下尽可能获得最大的模型精度。这类方法很多使用线性模型降阶技术来将原始大规模稀疏矩阵缩减为小规模稠密矩阵,作为宏模型用于串扰模拟,它可以在速度提高数个数量级的基础上仍然保证很高的精度。这些方法主要用于需要高精度的版图后验证(Post-Layout Verification),这可以使大规模工业设计在数小时内完成。

然而,在深亚微米VLSI芯片设计中,常常需要在芯片设计的早期阶段就对串扰噪声进行估计和寻找减少此类串扰噪声的方法。因此,第二类串扰噪声模拟方法的目的是进一步改善串扰噪声分析的有效性,以便其可以嵌套用于物理设计自动工具。这些方法将互连拓扑缩减为一些很简单的已知和固定拓扑的集总模板电路(Circuit Template),然后对这些简单的模板电路进行解析模拟。这类方法相较第一类方法的运算快好几个数量级。

几种常用的分析两相邻耦合互连线串扰噪声的模板电路(双节点对称电路<sup>[4]</sup>、四节点对称电路<sup>[8]</sup>、四节点非对称电路<sup>[9]</sup>和六节点对称电路<sup>[10]</sup>)如图9所示。

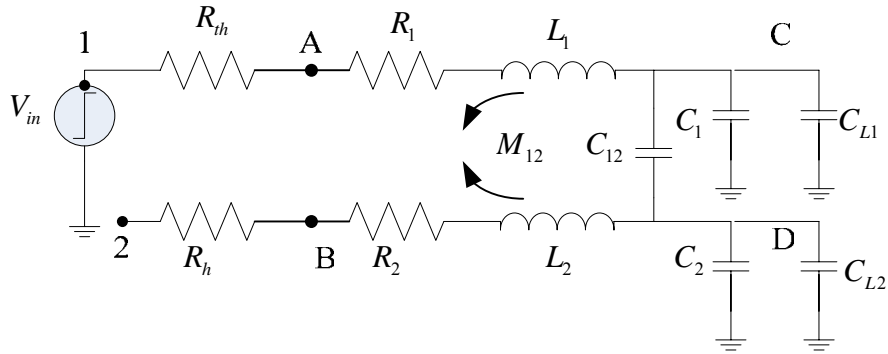




图表 9 几种常用的分析耦合互连串扰噪声的模板电路

Fig. 9 Several circuit template for analyzing crosstalk of coupled interconnects

当系统的频率进入到GHz范围内以后，耦合电感的影响已经不能被忽略。忽略耦合电感效应会严重低估信号的串扰。对于图6所示的带有驱动器和负载的两根平行耦合互连，G.Servel等人提出一种简单的模型如图9(d)所示。干扰线1的驱动器用等效Thevennin模型来表征，由电压源和电阻 $R_{th}$ 构成，被干扰线2的驱动器用电阻 $R_h$ 来表征，而它们的负载均采用电容来模拟。在文献<sup>[8]</sup>中，假设串扰的发生主要是由于相邻互连线的容性耦合引起的。但是随着特征尺寸的不断下降和频率的增加，研究在深亚微米电路中电感藕合对耦合噪声的贡献也显的尤为重要。我们对这个模型进行改进，增加了对互连线电感因素的考虑，得到如图所示的考虑了电感效应的互连模型。



图表 10 耦合 RLC 互连集总模型

Fig. 10 Lumped template circuit of coupled RLC interconnects

#### 1.4 本文的主要研究内容及安排

本文主要致力于耦合RLC树状互连的模拟研究。提出了一种快速高效的耦合RLC树状互连的矩的符号化计算方法，并以此对耦合RLC互连的型号完整性进行分析。本文主要的研究内容大致包括以下几个方面：

##### 1. 耦合RLC树状互连的模型降阶

集成电路系统中的互连网络通常为复杂的树形结构，互连网络的模拟方法直接影响着整个系统的仿真效率。模型降阶技术可以有效地提高大规模互连网络的仿真效率。本文第二章在基于矩匹配的模型降阶技术基础上，推导了耦合RLC互连树矩的计算公式，并用此构造投影矩阵，对原系统进行降阶。

##### 2. 矩的符号化计算方法

矩的递归数值计算方法需要记录电路的追踪路径，对于大规模电路而言，数值计算方法不适于多次计算。第三章在第二章的推算基础上，提出了基于矩决策图的矩的符号化计算方法，该算法利用一个连接电容树的电阻多根节点二叉决策图来处理计算过程中的路进追踪，从而能够有效地计算电路各节点的高阶矩。第三章还引入了耦合电容和互感的实现方法，并实现了一个耦合互连的符号化仿真器。

##### 3. 矩的符号化计算方法在串扰分析上的应用

互连之间的串扰会影响到信号在互连上传输的逻辑特性和时序特性。在深亚微米VLSI互连设计中必须充分考虑串扰效应。基于第三章的耦合互连的符号化仿真器，第四章对不同驱动器和互连参数对两相邻耦合RC互连串扰的影响及改善方法，讨论了串扰效应对相邻耦合RC互连延时的影响，考虑到在高频情况下除了电容耦合效应之外还同时存在电感耦合效应，也给出了不同驱动器和互连参数对两相邻耦合RLC

互连的串扰的影响。

最后在第五章对全文进行了总结并提出了需要继续研究的一些问题。

## 2 耦合 RLC 树状电路的模型降阶

本章将介绍模型降阶的基本原理，并从基于矩匹配的模型降阶算法入手，推导耦合RLC树状电路矩的求解公式，同时利用矩构造投影矩阵，对原电路模型进行降阶。

### 2.1 模型降阶的基本原理

#### 2.1.1 模型降阶算法介绍

针对不同线性电路的特点，人们通常对它们的降阶模型感兴趣，提出了许多模型降阶方法。目前的研究基本上分成两个方向向前发展。

第一类方法是基于矩匹配 (Moment Matching) 的降阶模型方法。它又分为两类：一类是利用Pade 近似来进行瞬态匹配降阶<sup>[2, 11-18]</sup>。由L. T. Pillage首先提出了著名的AWE(Asymptotic Waveform Evaluation)<sup>[2]</sup>算法，该算法相对于传统的SPICE仿真器来说是一个进步，能够很好地匹配 $2n$ 阶矩，计算的精确性也能够得到保障，但是该算法的计算速度还是不够理想。之后，在该算法的基础上，研究者又提出了很多新的算法，这些算法有一个共性，都是建立在由Krylov子空间投影算法产生的降阶模型，避免了AWE算法在矩匹配过程中需要直接计算矩的缺点。R. Freund提出了基于Lanczos迭代的Krylov子空间算法而进行Pade近似的降阶算法PVVL<sup>[12]</sup>，之后他又加以改进提出了多端口的MPVL<sup>[11]</sup>算法，以及对于与RLC电路的单端口的SyPVVL<sup>[17]</sup>及多端口的SyMPVL<sup>[18]</sup>。另一种基于Krylov子空间的是Arnoldi算法，由于它在模型降阶中的应用，相应产生了由A.Odabasioglu提出的PRIMA算法<sup>[15]</sup>，该算法能够保持电路的稳定性和无源性，但是仅仅针对固定的电路形式。

另一类计算降阶模型的方法是平衡截断实现法 (Truncated Balanced Realization)<sup>[19]</sup>，它是在控制领域的研究中产生的，它能产生一个接近优化的Hankel-norm 近似，并且有著名的 $L_\infty$ 传输函数误差限。但是它需要求解两个Lyapunov 方程，计算量非常大。Jing-Rebecca Li 等<sup>[20]</sup>根据这个原理，利用系统的主可控子空间来计算互连线的降阶模型，取得了比较好的效果。最近，Janet M. Wang等提出了一种基于时域技术的降阶模型方法，对于处理有强烈互感的互连线有非常好的效果。

另外，在经历了对于模型降阶数十年的研究后，现在的研究者已不满足于仅仅进行理想情况下的研究，而是与电子工业的发展结合起来。由于工艺尺寸的不断

缩小，以及在加工过程中各类环境，材料因素的影响，现在的集成电路的产品的性能可能与设计时理想的性能相差很大，而且随着工艺尺寸的继续缩小，这种影响的效果将会更显著。所以我们在模型降阶的过程中也要考虑到电路参数的变化情况对于整个系统的影响。对此，如何在电路的参数变化的情况下进行模型降阶成为了现今的一个研究的热点。Ying Liu<sup>[21]</sup>分析了参数扰动对于PACT<sup>[22]</sup>及PRIMA算法的影响，James D.Ma<sup>[23]</sup>提出了使用有限区间来对参数变化的概率密度函数进行分析，并且与传统的Monte Carlo方法结合，并且将他所提出的算法应用到了AWE算法和PRIMA算法之上进行了误差分析。

### 2.1.2 模型降阶基本思想

我们可以把电路描述成改进节点法 ( Modified Nodal Analysis , MNA ) 的形式：

$$\begin{aligned} C\dot{\mathbf{x}} &= -\mathbf{G}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{L}^T\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.1)$$

其中C表示储能元件电容和电感对电路方程的贡献，G表示耗能元件电阻和电导对电路方程的贡献。x是状态变量，由所有节点的节点电压和一些未知电流变量组成。这些电流变量包括独立电压源的电流和电感之路的电流。系数矩阵C和G的阶数等于电路中节点数加上电感支路数再加上端口数。这就说明当电路规模变得很大的时候，这个方程的系数矩阵将有很高的阶数，这为求解带来很大的困难。

从另一个方面看，对于电路仿真来说，我们往往只关心输入和输出的关系，即传输函数。而对于电路内部的状态变量——节点的具体电压电流并不关心。因此我们可以把原来的电路看成一个黑盒，我们希望找到一个小规模的等价电路或数学模型，它的传输函数在一定程度上近似原电路的传输函数，这个模型称为降阶模型。

我们可以将原系统 2.1 改写为：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.2)$$

原系统的传输函数为：

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{H}(s)\mathbf{U}(s) \end{aligned} \quad (2.3)$$

所以降阶模型就是要去寻找一个新的系统：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_r' &= \mathbf{A}_r\mathbf{x}_r + \mathbf{B}_r u \\ y_r &= \mathbf{C}_r\mathbf{x}_r \end{aligned} \quad (2.4)$$

以至于这个新系统的状态变量远远小于原来系统的状态变量，而新的传输函数：

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_r(s) &= \mathbf{C}_r(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_r)^{-1}\mathbf{B}_r \\ \mathbf{Y}_r(s) &= \mathbf{G}_r(s)\mathbf{U}_r(s) \end{aligned} \quad (2.5)$$

在可接受的误差范围内原系统很接近。

由 A.Odabasioglu 在 1998 年提出的无源互连宏模型降阶算法 (PRIMA) [15] 就是通过 block Arnoldi 算法中的正交过程将  $\mathbf{A}$  矩阵化为上 Hessenberg 矩阵, 由于上 Hessenberg 矩阵的形式特殊, 从而能够大大减少矩阵求逆的运算量, 从而加快仿真速度。其中矩阵  $\mathbf{X}$  满足:

$$\begin{aligned} \text{colsp}(\mathbf{X}) &= \text{Kr}(\mathbf{A}, \mathbf{R}, \mathbf{q}) \\ \mathbf{X}^T \mathbf{X} &= \mathbf{I}_q \\ \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X} &= \mathbf{H} \end{aligned} \quad (2.6)$$

并且 PRIMA 使用矩阵  $\mathbf{X}$  将 MNA 算法得到的电路状态方程中的  $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{B}$ 、 $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{L}$  矩阵进行变换, 得到

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{C}} &= \mathbf{X}^T \mathbf{C} \mathbf{X} & \hat{\mathbf{G}} &= \mathbf{X}^T \mathbf{G} \mathbf{X} \\ \hat{\mathbf{B}} &= \mathbf{X}^T \mathbf{B} & \hat{\mathbf{L}} &= \mathbf{X}^T \mathbf{L} \end{aligned} \quad (2.7)$$

这里的  $\hat{\mathbf{C}}$ 、 $\hat{\mathbf{G}}$ 、 $\hat{\mathbf{B}}$ 、 $\hat{\mathbf{L}}$  矩阵的阶数均为  $q$  小于原来的阶数  $N$ , 此时应用 PRIMA 算法得到的降阶模型同时还保持了无源性、稳定性以及  $\left\lfloor \frac{q}{N} \right\rfloor$  阶矩匹配。

## 2.2 基于矩匹配的模型降阶算法

### 2.2.1 矩的定义

我们定义系统的脉冲响应为  $h(t)$ , 则系统的频域传输函数可以通过对  $h(t)$  进行 Laplace 变换得到:

$$H(s) = \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt \quad (2.8)$$

由于  $e^{-st}$  的 Taylor 展开为  $e^{-st} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-t)^i s^i}{i!}$ , 我们可以将  $H(s)$  进行 Taylor 展开:

$$H(s) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i s^i \quad (2.9)$$

其中

$$m_i = \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^{\infty} t^i h(t) dt \quad (2.10)$$

称为系统脉冲响应  $h(t)$  的第  $i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) 阶矩 (moment)。

## 2.2.2 矩的匹配

对原系统 2.1 式进行 Laplace 变换可得到频域的系统方程为：

$$\begin{aligned} \mathbf{C}\mathbf{X}(s)s &= -\mathbf{G}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \\ \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{L}^T \mathbf{X}(s) \end{aligned} \quad (2.11)$$

我们定义系统的输入为脉冲函数，即  $\mathbf{U}(s)=1$ ，状态向量  $\mathbf{X}(s)$  的第  $i$  阶矩为  $x_i$ ，于是如同 2.9 式的定义有：

$$\mathbf{X}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i s^i \quad (2.12)$$

将 2.12 式带入 2.11 式得到：

$$\mathbf{C}s \sum_{i=0}^{\infty} x_i s^i = -\mathbf{G} \sum_{i=0}^{\infty} x_i s^i + \mathbf{B} \quad (2.13)$$

匹配 2.14 式等号两边  $s^i (i=0,1,2,\dots)$  的系数，得到：

$$\begin{aligned} \mathbf{G}x_0 &= \mathbf{B} \\ \mathbf{G}x_1 &= -\mathbf{C}x_0 \\ \dots & \\ \mathbf{G}x_n &= -\mathbf{C}x_{n-1} \end{aligned} \quad (2.14)$$

观察 2.15 式我们可以发现， $\mathbf{X}(s)$  的第  $i$  阶矩是由第  $i-1$  矩递推得来的，即：

$$\begin{aligned} x_0 &= \mathbf{G}^{-1}\mathbf{B} \\ x_1 &= -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}x_0 = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B}) \\ \dots & \\ x_n &= -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C}x_{n-1} = (-\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C})^n (\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B}) \end{aligned} \quad (2.15)$$

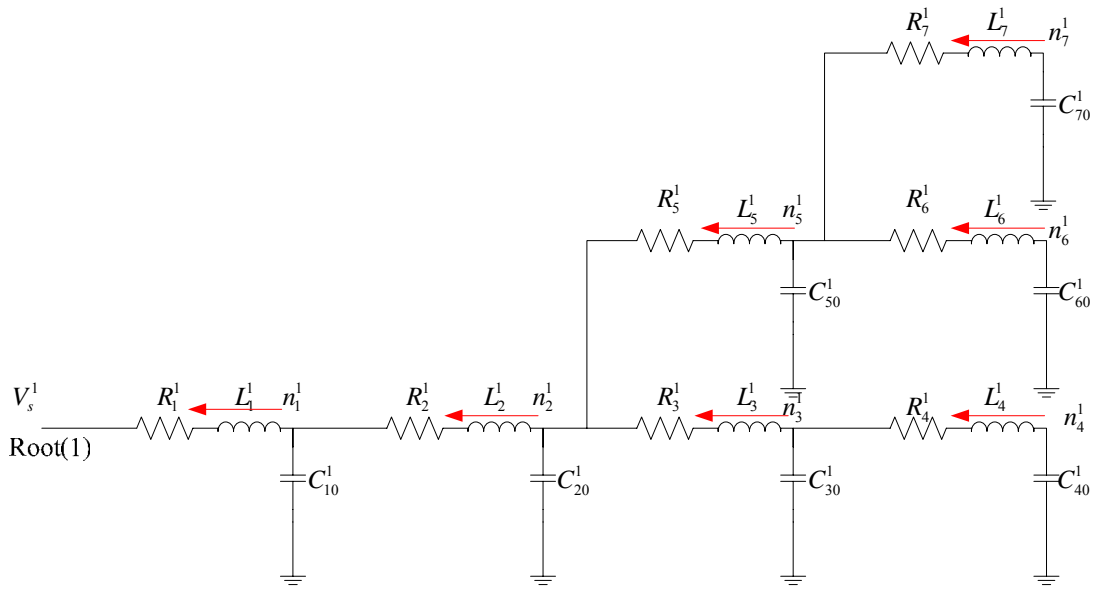
于是系统的传输函数为  $\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{Y}(s)}{\mathbf{U}(s)} = \mathbf{L}^T \mathbf{X}(s)$ ，将 2.9 式和 2.15 式代入得到传输函数  $h(t)$  的

第  $k (k=0,1,2,\dots)$  阶矩  $m_k$  为：

$$m_k = \mathbf{L}^T x_k = \mathbf{L}^T (-\mathbf{G}^{-1}\mathbf{C})^k (\mathbf{G}^{-1}\mathbf{B}) \quad (2.16)$$

由此可以看出，通过矩匹配，电路的各阶矩可以迭代求出。

对于互连线 RLC 树模型，式 2.1 的状态向量  $\mathbf{x}$  是由节点电压和支路电流构成的。系统矩阵  $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{B}$  是有着特殊的结构的。这个特殊的结构能够简化矩的计算。下面我们以如图 11 所示的 RLC 树状电路为例来分析。



图表 11 RLC 树状电路

Fig. 11 An RLC-tree circuit

我们对于如图 2.1 所示的 RLC 树状电路的每一个输出节点  $n_i^1 (i=1\dots7)$  联立 KCL 方程，对于每一条  $R_i^1 \rightarrow L_i^1 (i=1\dots7)$  支路联立 KVL 方程：

$$\begin{cases} \mathbf{C}_1 \frac{d\mathbf{V}_1}{dt} + \mathbf{A}_1 \mathbf{I}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{L}_1 \frac{d\mathbf{I}_1}{dt} - \mathbf{A}_1^T \mathbf{V}_1 + \mathbf{R}_1 \mathbf{I}_1 = -\mathbf{e}_1 \mathbf{V}_{in}^1 \end{cases} \quad (2.17)$$

其中电容矩阵  $\mathbf{C}_1 = \text{diag}[C_1^1, \dots, C_n^1]$ ，电感矩阵  $\mathbf{L}_1 = \text{diag}[L_1^1, \dots, L_n^1]$ ，电阻矩阵  $\mathbf{R}_1 = \text{diag}[R_1^1, \dots, R_n^1]$ ，电压向量  $\mathbf{V}_1 = [v_1^1, \dots, v_n^1]^T$ ，电流向量  $\mathbf{I}_1 = [i_1^1, \dots, i_n^1]^T$ 。关联矩阵  $\mathbf{A}_1$  是一个上三角矩阵，与树状电路的拓扑结构有关。

$$\mathbf{A}_1(i, j) = \begin{cases} -1 & \text{点 } n_i^1 \text{ 与 } n_j^1 (i < j) \text{ 之间存在支路} \\ 1 & i=j \\ 0 & \text{点 } n_i^1 \text{ 与 } n_j^1 (i < j) \text{ 之间存在支路或 } i > j \end{cases} \quad (2.18)$$

对于如图 9 所示的电路，



$$\mathbf{A}_1 = \begin{matrix} n_1^1 & n_2^1 & n_3^1 & n_4^1 & n_5^1 & n_6^1 & n_7^1 \\ n_1^1 & \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & -1 & & & & & \\ & 1 & -1 & & -1 & & \\ & & 1 & -1 & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & -1 & -1 \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (2.19)$$

对关联矩阵  $\mathbf{A}_1$  求逆可得：

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \begin{matrix} n_1^1 & n_2^1 & n_3^1 & n_4^1 & n_5^1 & n_6^1 & n_7^1 \\ n_1^1 & \left[ \begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & 1 & 1 \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{array} \right] \end{matrix} \quad (2.20)$$

对于一般的 RLC 树状电路有

$$\mathbf{A}_1^{-1}(i, j) = \begin{cases} 1 & i=j \text{ 或 } n_j^1 \text{ 是 } n_i^1 (i < j) \text{ 的后续节点} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (2.21)$$

将 2.1 式两式合并得到电路的矩阵表示：

$$\tilde{\mathbf{E}}_1 \frac{d\mathbf{X}_1}{dt} + \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{X}_1 = \tilde{\mathbf{F}}_1 \mathbf{V}_m^1 \quad (2.22)$$

$$\text{其中 } \tilde{\mathbf{E}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \\ & \mathbf{L}_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_1 \\ -\mathbf{A}_1^T & \mathbf{R}_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1 \\ \mathbf{I}_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{e}_1 \end{bmatrix}.$$

根据 2.14 式和 2.15 式我们可以得到：

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_1 x_{1,0} &= \tilde{\mathbf{F}}_1 \\ \tilde{\mathbf{A}}_1 x_{1,1} &= -\tilde{\mathbf{E}}_1 x_{1,0} \\ &\dots \\ \tilde{\mathbf{A}}_1 x_{1,n} &= -\tilde{\mathbf{E}}_1 x_{1,n-1} \end{aligned} \quad (2.23)$$

这里我们定义  $x_{1,k}$  为  $\mathbf{X}_1$  的第  $k (k=0,1,\dots)$  阶矩，其中：

$$x_{1,0} = \tilde{\mathbf{A}}_1^{-1} \tilde{\mathbf{F}}_1 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_1^{-1} & -\mathbf{A}_1^{-T} \\ \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{e}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-T} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{1}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

为电路的直流解（此时电容等效为 0 值电流源，电感等效为 0 值电压源，原输入等效为值为 1 的电压源）。这里我们定义  $\mathbf{m}_C^{(0)} = \bar{\mathbf{1}}$  为电路的 0 阶电容矩， $\mathbf{m}_L^{(0)} = \mathbf{0}$  为电路的 0 阶电感矩。同样， $\tilde{\mathbf{A}}_1 x_{1,1} = -\tilde{\mathbf{E}}_1 x_{1,0}$  为电路输入为  $x_{1,0}$  的直流解（此时电容等效为值为电容值的电流源，电感等效为值为 0 的电压源，原输入为 0）。此时

$$x_{1,1} = (\tilde{\mathbf{A}}_1^{-1} \tilde{\mathbf{E}}_1) x_{1,0} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_1^{-1} \mathbf{C}_1 & -\mathbf{A}_1^{-T} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{1}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \bar{\mathbf{1}} \\ \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \bar{\mathbf{1}} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

我们同样定义  $\mathbf{m}_C^{(1)} = \tilde{\mathbf{G}}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \bar{\mathbf{1}}$  为电路的 1 阶电容矩， $\mathbf{m}_L^{(1)} = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \bar{\mathbf{1}}$  为电路的 1 阶电感矩。然后，我们将电容乘上对应的 1 阶电容矩作为电流源，电感乘上对应的 1 阶电感矩作为电压源，同时把激励源设为 0，对电路进行直流分析，此时

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= (\tilde{\mathbf{A}}_1^{-1} \tilde{\mathbf{E}}_1) x_{1,1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_1^{-1} \mathbf{C}_1 & -\mathbf{A}_1^{-T} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m}_C^{(1)} \\ \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{m}_C^{(0)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{m}_C^{(1)} - \tilde{\mathbf{L}}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{m}_C^{(0)} \\ \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{m}_C^{(1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.26)$$

我们同样定义  $\mathbf{m}_C^{(2)} = \tilde{\mathbf{G}}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{m}_C^{(1)}$  为电路的 2 阶电容矩， $\mathbf{m}_L^{(2)} = \tilde{\mathbf{A}}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{m}_C^{(1)}$  为电路的 2 阶电感矩。以此类推，

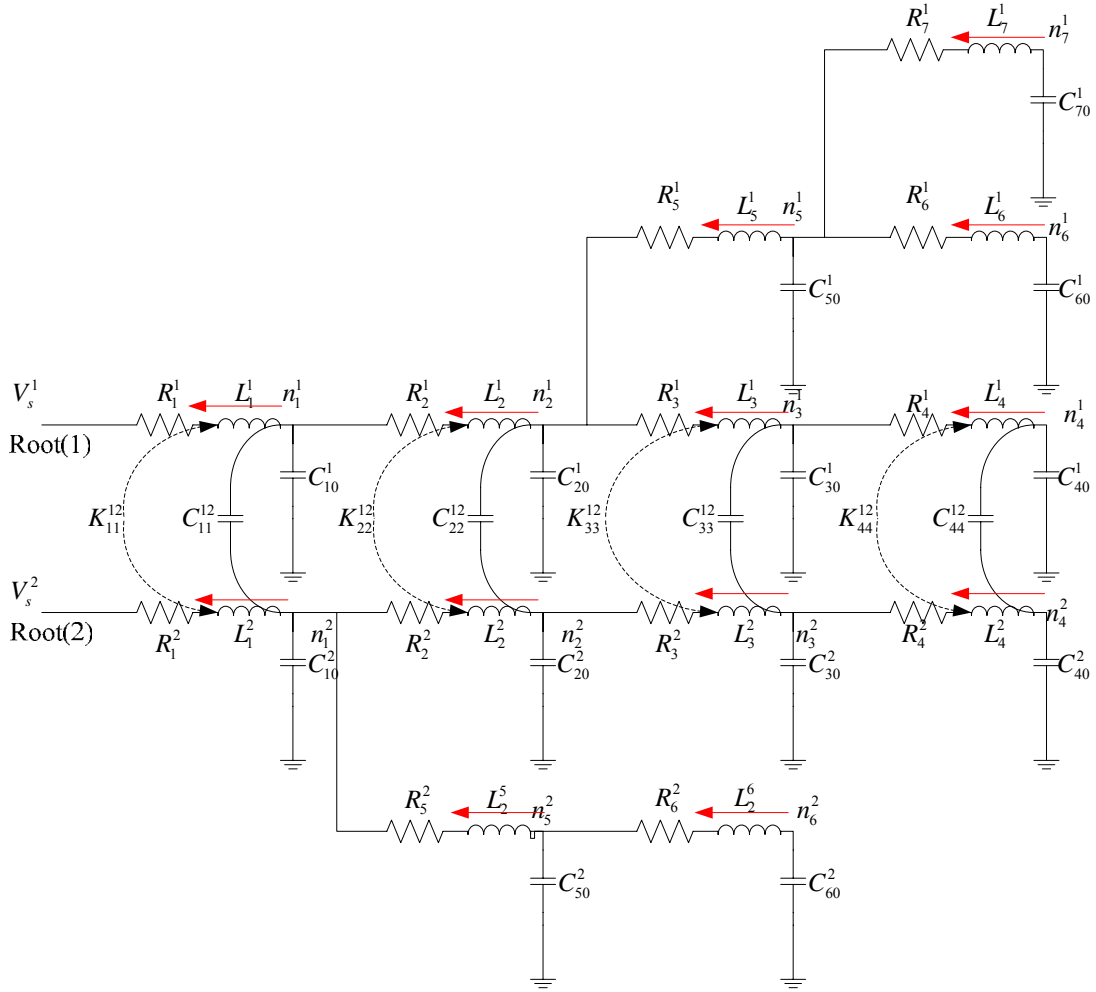
$$\begin{aligned} x_{1,k} &= (\tilde{\mathbf{A}}_1^{-1} \tilde{\mathbf{E}}_1) x_{1,k-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_1^{-1} \mathbf{C}_1 & -\mathbf{A}_1^{-T} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m}_C^{(k-1)} \\ \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{m}_C^{(k-2)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{m}_C^{(k-1)} - \tilde{\mathbf{L}}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{m}_C^{(k-2)} \\ \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{m}_C^{(k-1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.27)$$

其中  $\mathbf{m}_C^{(k)} = \tilde{\mathbf{G}}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{m}_C^{(k-1)} - \tilde{\mathbf{L}}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{m}_C^{(k-2)}$  为电路的 k 阶电容矩， $\mathbf{m}_L^{(k)} = \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{m}_C^{(k-1)}$  为电路的 k 阶电感矩。如果我们设电压  $v_n^1$  对应的 k 阶电容矩为  $m_{C_n^1}(k)$ ，电流  $i_n^1$  对应的 k 阶电感矩为  $m_{L_n^1}(k)$ ，则将式 2.27 展开可得：

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_{C_j^1}(k) &= \sum_{R_l^1 \in PR_j^1} R_l^1 \sum_{C_d^1 \in CD_l^1} C_d^1 m_{C_d^1}(k-1) - \sum_{L_l^1 \in PL_j^1} L_l^1 \sum_{C_d^1 \in CD_l^1} C_d^1 m_{C_d^1}(k-2) \\ \mathbf{m}_{L_j^1}(k) &= \sum_{C_d^1 \in CD_j^1} C_d^1 m_{C_d^1}(k-1) \end{aligned} \quad (2.28)$$

对于如图 10 所示的含耦合电容和互感的耦合 RLC 树状电路的每一个输出节点  $n_i^1 (i=1\dots7)$  和点  $n_i^2 (i=1\dots6)$  联立 KCL 方程，对每一条支路  $R_i^1 \rightarrow L_i^1 (i=1\dots7)$  和

$R_i^2 \rightarrow L_i^2 (i=1\dots6)$  联立 KVL 方程：



图表 12 耦合 RLC 树状电路

Fig. 12 A Coupled RLC-tree circuit

$$\begin{cases} \mathbf{C}' \frac{d\mathbf{V}'}{dt} + \mathbf{A}'\mathbf{I}' = \mathbf{0} \\ \mathbf{L}' \frac{d\mathbf{I}'}{dt} - \mathbf{A}'^T\mathbf{V}' + \mathbf{R}'\mathbf{I}' = \begin{bmatrix} -\mathbf{e}_1 V_{in}^1 \\ -\mathbf{e}'_1 V_{in}^2 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (2.29)$$

其中  $\mathbf{C}' = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1' & \mathbf{C}_c \\ \mathbf{C}_c^T & \mathbf{C}_2' \end{bmatrix}$  为电容矩阵，这里对角矩阵  $\mathbf{C}_1'$  和  $\mathbf{C}_2'$  为：

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_1' &= \text{diag}[C_{10}^1 + C_{11}^{12}, C_{20}^1 + C_{22}^{12}, C_{30}^1 + C_{33}^{12}, C_{40}^1 + C_{44}^{12}, C_{50}^1, C_{60}^1, C_{70}^1] \\ \mathbf{C}_2' &= \text{diag}[C_{10}^2 + C_{11}^{12}, C_{20}^2 + C_{22}^{12}, C_{30}^2 + C_{33}^{12}, C_{40}^2 + C_{44}^{12}, C_{50}^2, C_{60}^2] \end{aligned} \quad (2.30)$$

耦合矩阵  $\mathbf{C}_c$  为：

$$\mathbf{C}_C = \begin{bmatrix} -C_{11}^{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -C_{22}^{12} & & \\ & & -C_{33}^{12} & \vdots \\ \vdots & & & -C_{44}^{12} \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{7 \times 6} \quad (2.31)$$

电感矩阵  $\mathbf{L}' = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_M \\ \mathbf{L}_M^T & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix}$ ，这里对角矩阵  $\mathbf{L}_1$  和  $\mathbf{L}_2$  为：

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_1 &= \text{diag}[L_1^1, \dots, L_7^1] \\ \mathbf{L}_2 &= \text{diag}[L_1^2, \dots, L_6^2] \end{aligned} \quad (2.32)$$

互感矩阵  $\mathbf{L}_M$  为：

$$\mathbf{L}_M = \begin{bmatrix} M_{11}^{12} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_{22}^{12} & & \\ & & M_{33}^{12} & \vdots \\ \vdots & & & M_{44}^{12} \\ & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{bmatrix}_{7 \times 6} \quad (2.33)$$

电阻矩阵  $\mathbf{R}' = \text{diag}[\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2]$ ，电压向量  $\mathbf{V}' = [\mathbf{V}_1 \ \mathbf{V}_2]^T$ ，电流向量  $\mathbf{I}' = [\mathbf{I}_1 \ \mathbf{I}_2]^T$ 。关联矩阵为  $\mathbf{A}' = \text{diag}[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2]$ 。

将 2.29 两式合并得到：

$$\tilde{\mathbf{E}}' \frac{d\mathbf{X}'}{dt} + \tilde{\mathbf{A}}' \mathbf{X}' = \tilde{\mathbf{F}}' \mathbf{V}_{in}' \quad (2.34)$$

$$\text{其中 } \tilde{\mathbf{E}}' = \begin{bmatrix} \mathbf{C}' & \\ & \mathbf{L}' \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{A}}' = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}' \\ -\mathbf{A}'^T & \mathbf{R}' \end{bmatrix}, \mathbf{X}' = \begin{bmatrix} \mathbf{V}' \\ \mathbf{I}' \end{bmatrix}, \tilde{\mathbf{F}}' = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{0}}' \\ -\mathbf{e}_1 \\ -\mathbf{e}'_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{E}_1 \end{bmatrix}。$$

根据 2.23 式和 2.24 式我们可以得到  $\mathbf{X}'$  的各阶矩，其中

$$x'_0 = \tilde{\mathbf{A}}'^{-1} \tilde{\mathbf{F}}' = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}'^{-1} & -\mathbf{A}'^T \\ \mathbf{A}'^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{E}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}'^T \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{1}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$x'_1 = (\tilde{\mathbf{A}}'^{-1} \tilde{\mathbf{E}}') x'_0 = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}'^{-1} \mathbf{C}' & -\mathbf{A}'^T \mathbf{L}' \\ \mathbf{A}'^{-1} \mathbf{C}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{1}} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}'^{-1} \mathbf{C}' \bar{\mathbf{1}} \\ \mathbf{A}'^{-1} \mathbf{C}' \bar{\mathbf{1}} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

这里我们定义  $\mathbf{m}'_C^{(0)} = \bar{\mathbf{1}}$  为电路的 0 阶电容矩， $\mathbf{m}'_L^{(0)} = \mathbf{0}$  为电路的 0 阶电感矩，它们同样是将电容替换成 0 值电流源，电感替换成 0 只电压源，输入替换成值为 1 的激励源后得到的直流解。 $\mathbf{m}'_C^{(1)} = \tilde{\mathbf{G}}'^{-1} \mathbf{C}' \bar{\mathbf{1}}$  为电路的 1 阶电容矩， $\mathbf{m}'_L^{(1)} = \mathbf{A}'^{-1} \mathbf{C}' \bar{\mathbf{1}}$  为电路的 1 阶电感矩。它们是将电容替换成值为  $\mathbf{C}' \mathbf{m}'_C^{(0)}$  的电流源，电感替换成值为  $\mathbf{L}' \mathbf{m}'_L^{(0)}$  的电压源，激励替换成 0 值电压源后的直流解。我们观察  $\mathbf{C}' \mathbf{m}'_C^{(0)}$  可以发现，

$$\mathbf{C}' \mathbf{m}'_C^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1' & \mathbf{C}_C \\ \mathbf{C}_C^T & \mathbf{C}_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m'_{C_1}{}^{(0)} \\ m'_{C_2}{}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1' m'_{C_1}{}^{(0)} + \mathbf{C}_C m'_{C_2}{}^{(0)} \\ \mathbf{C}_C^T m'_{C_1}{}^{(0)} + \mathbf{C}_2' m'_{C_2}{}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

将 2.30 式和 2.31 式带入 2.37 式我们可以得到，对于含有电容耦合的节点  $n_j^i$ ，它对应的电容  $C_j^i$  等效为值为  $C_j^i m'_{C_j}{}^{(0)} + \sum_{C_{j_1}^{i_1} \in CC_j^i} C_{j_1}^{i_1} (m'_{C_j}{}^{(0)} - m'_{C_{j_1}^{i_1}}{}^{(0)})$  的电流源，对于不含耦合的节点  $n_k^i$ ，它对应的电容  $C_k^i$  等效为值为  $C_k^i m'_{C_k}{}^{(0)}$  的电流源。我们同样观察  $\mathbf{L}' \mathbf{m}'_L^{(0)}$  可以发现，

$$\mathbf{L}' \mathbf{m}'_L^{(0)} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_M \\ \mathbf{L}_M^T & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m}'_{L_1}{}^{(0)} \\ \mathbf{m}'_{L_2}{}^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 \mathbf{m}'_{L_1}{}^{(0)} + \mathbf{L}_M \mathbf{m}'_{L_2}{}^{(0)} \\ \mathbf{L}_M^T \mathbf{m}'_{L_1}{}^{(0)} + \mathbf{L}_2 \mathbf{m}'_{L_2}{}^{(0)} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

将 2.32 和 2.33 式带入 2.38 式我们可以看到，对于含有互感的支路  $R_j^i \rightarrow L_j^i$ ，它对应的电感  $L_j^i$  等效为值为  $L_j^i m'_{L_j}{}^{(0)} + \sum_{M_{j_1}^{i_1} \in ML_j^i} M_{j_1}^{i_1} m'_{L_{j_1}^{i_1}}{}^{(0)}$  的电压源，对于不含互感的支路

$R_k^i \rightarrow L_k^i$ ，它对应的电感  $L_k^i$  等效为值为  $L_k^i m'_{L_k}{}^{(0)}$  的电压源。

于是我们定义  $\mathbf{X}'$  的 k 阶矩：

$$\begin{aligned} x'_k &= (\tilde{\mathbf{A}}'^{-1} \tilde{\mathbf{E}}') x'_{k-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}'^{-1} \mathbf{C}' & -\mathbf{A}'^T \mathbf{L}' \\ \mathbf{A}'^{-1} \mathbf{C}' & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m}'_C^{(k-1)} \\ \mathbf{A}'^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{m}'_C^{(k-2)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{G}}'^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{m}'_C^{(k-1)} - \tilde{\mathbf{L}}'^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{m}'_C^{(k-2)} \\ \mathbf{A}'^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{m}'_C^{(k-1)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.39)$$

其中 k 阶电容矩为  $\mathbf{m}'_C^{(k)} = \tilde{\mathbf{G}}'^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{m}'_C^{(k-1)} - \tilde{\mathbf{L}}'^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{m}'_C^{(k-2)}$ ，k 阶电感矩为  $\mathbf{m}'_L^{(k)} = \mathbf{A}'^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{m}'_C^{(k-1)}$ 。

将式 2.30 到式 2.34 带入，我们得到：

$$\begin{aligned} \mathbf{m}'_{\mathbf{C}}(k) &= \tilde{\mathbf{G}}^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{m}'_{\mathbf{C}}(k-1) - \tilde{\mathbf{L}}^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{m}'_{\mathbf{C}}(k-2) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-\text{T}} \mathbf{R}_1 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{m}'_{\mathbf{C}_1}(k-1) + \mathbf{A}_1^{-\text{T}} \mathbf{R}_1 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{m}'_{\mathbf{C}_2}(k-1) - \mathbf{A}_1^{-\text{T}} \mathbf{L}_1 \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{m}'_{\mathbf{C}_1}(k-2) - \mathbf{A}_1^{-\text{T}} \mathbf{L}_M \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{m}'_{\mathbf{C}_2}(k-2) \\ \mathbf{A}_2^{-\text{T}} \mathbf{R}_2 \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{m}'_{\mathbf{C}_1}(k-1) + \mathbf{A}_2^{-\text{T}} \mathbf{R}_2 \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{m}'_{\mathbf{C}_2}(k-1) - \mathbf{A}_2^{-\text{T}} \mathbf{L}_M^{\text{T}} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{m}'_{\mathbf{C}_1}(k-2) - \mathbf{A}_2^{-\text{T}} \mathbf{L}_2 \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{m}'_{\mathbf{C}_2}(k-2) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.40)$$

通过对矩阵的计算，我们可以得到电路节点  $n_j^i$  对应电容  $C_j^i$  的  $k$  阶矩为：

$$\mathbf{m}'_{C_j^i}(k) = \sum_{R_l^i \in PR_j^i} R_l^i \mathbf{m}'_{L_l^i}(k) - \sum_{L_l^i \in PL_j^i} (L_l^i \mathbf{m}'_{L_l^i}(k-1)) + \sum_{M_{ll_1}^{ii} \in M_j^i} M_{ll_1}^{ii} \mathbf{m}'_{L_{l_1}^i}(k-1) \quad (2.41)$$

同样

$$\begin{aligned} \mathbf{m}'_{\mathbf{L}}(k) &= \mathbf{A}^{-1} \mathbf{C}' \mathbf{m}'_{\mathbf{C}}(k-1) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_C \\ \mathbf{C}_C^{\text{T}} & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m}'_{\mathbf{C}_1}(k-1) \\ \mathbf{m}'_{\mathbf{C}_2}(k-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_C \\ \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{C}_C^{\text{T}} & \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{m}'_{\mathbf{C}_1}(k-1) \\ \mathbf{m}'_{\mathbf{C}_2}(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_1 \mathbf{m}'_{\mathbf{C}_1}(k-1) + \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{C}_C \mathbf{m}'_{\mathbf{C}_2}(k-1) \\ \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{C}_C^{\text{T}} \mathbf{m}'_{\mathbf{C}_1}(k-1) + \mathbf{A}_2^{-1} \mathbf{C}_2 \mathbf{m}'_{\mathbf{C}_2}(k-1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.42)$$

通过对矩阵的计算，我们可以得到电路支路  $R_j^i \rightarrow L_j^i$  对应电感  $L_j^i$  的  $k$  阶矩为：

$$\mathbf{m}'_{L_j^i}(k) = \sum_{C_d^i \in CD_j^i} \left\{ C_d^i \mathbf{m}'_{C_d^i}(k-1) + \sum_{C_{dd_1}^{ii} \in CC_d^i} C_{dd_1}^{ii} (\mathbf{m}'_{C_d^i}(k-1) - \mathbf{m}'_{C_{d_1}^i}(k-1)) \right\} \quad (2.43)$$

对于由  $N$  个 RLC 树状电路相互耦合的一般情况，我们有

$$\tilde{\mathbf{E}} \frac{d\mathbf{X}}{dt} + \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{X} = \tilde{\mathbf{F}} \mathbf{V}_{in} \quad (2.44)$$

$$\text{其中 } \tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A} \\ -\mathbf{A}^{\text{T}} & \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{e}_1 \end{bmatrix}.$$

其中电容矩阵  $\mathbf{C}$  为：

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_{C12} & \cdots & \mathbf{C}_{C1n} \\ \mathbf{C}_{C12}^{\text{T}} & \mathbf{C}_2 & \cdots & \mathbf{C}_{C2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{C1n}^{\text{T}} & \mathbf{C}_{C2n}^{\text{T}} & \cdots & \mathbf{C}_n \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

其中对角矩阵  $\mathbf{C}_i$  的第  $(k, j)$  个元素值为：

$$C_i(k, j) = \begin{cases} C_{k0}^i + \sum_{C_{kk_1}^{ii} \in CC_k^i} C_{kk_1}^{ii}, & (k = j) \\ 0, & (k \neq j) \end{cases} \quad (2.46)$$

耦合电容矩阵  $\mathbf{C}_{Cnm}$  的第  $(k, j)$  个元素值为：

$$C_{Cnm}(k, j) = -C_{nm}^{kj} \quad (2.47)$$

电感矩阵  $\mathbf{L}$  为：

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_{M12} & \cdots & \mathbf{L}_{M1n} \\ \mathbf{L}_{M12}^T & \mathbf{L}_2 & \cdots & \mathbf{L}_{M2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{L}_{M1n}^T & \mathbf{L}_{M2n}^T & \cdots & \mathbf{L}_n \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

其中对角矩阵  $\mathbf{L}_i$  的第  $(k, j)$  个元素为：

$$L_i(k, j) = \begin{cases} L_k^i, & (k = j) \\ 0, & (k \neq j) \end{cases} \quad (2.49)$$

互感矩阵  $\mathbf{L}_{Mnm}$  第  $(k, j)$  个元素为

$$L_{Mnm}(k, j) = M_{nm}^{kj} \quad (2.50)$$

关联矩阵  $\mathbf{A} = \text{diag}[\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n]$ ，电阻矩阵  $\mathbf{R} = \text{diag}[\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_n]$ 。我们设电路的  $k$  阶矩阵为

$$\mathbf{m}^{(k)} = [\mathbf{m}_{C1}^{(k)} \quad \mathbf{m}_{C2}^{(k)} \quad \cdots \quad \mathbf{m}_{Cn}^{(k)} \quad \mathbf{m}_{L1}^{(k)} \quad \mathbf{m}_{L2}^{(k)} \quad \cdots \quad \mathbf{m}_{L3}^{(k)}]^T \quad (2.51)$$

其中  $\mathbf{m}_{C_i}^{(k)} = [m_{C_{i0}^{i_1}}(k) \quad m_{C_{i0}^{i_2}}(k) \quad \cdots \quad m_{C_{i0}^{i_{N_i}}}(k)]$  为电路的  $k$  阶电容矩阵，

$\mathbf{m}_{L_i}^{(k)} = [m_{L_i^{i_1}}(k) \quad m_{L_i^{i_2}}(k) \quad \cdots \quad m_{L_i^{i_{N_i}}}(k)]$  为电路的  $k$  阶电感矩阵。

### 2.2.3 矩的计算

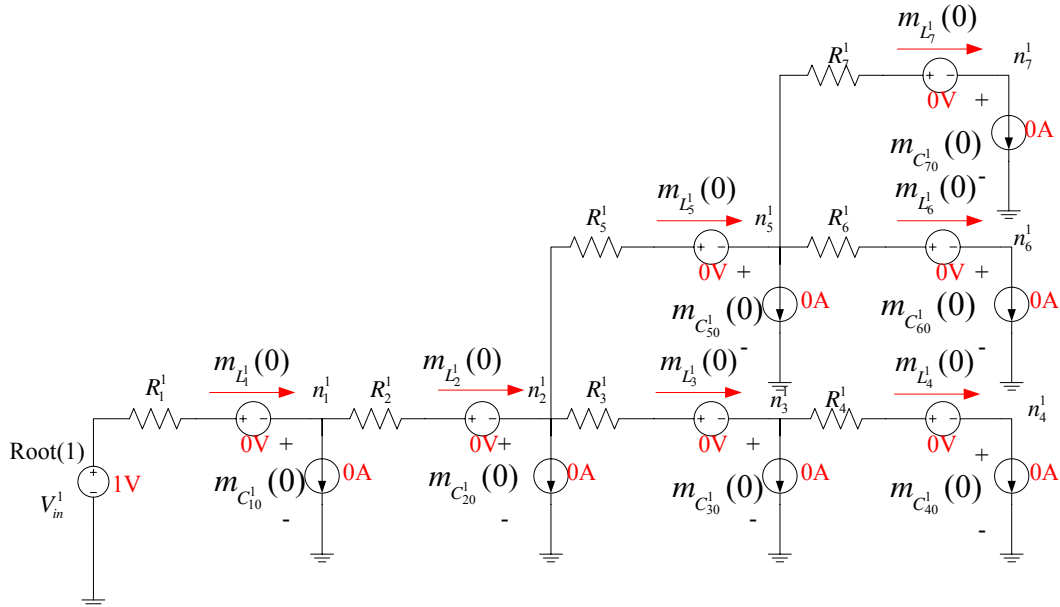
从上面对树状电路矩匹配的分析可以看出，电路矩的计算是与电路拓扑结构相关的迭代过程。Pillage 提出的 Rapid Interconnect Circuit Evaluation (RICE)<sup>[24]</sup> 算法的巧妙之处在于它没有直接通过矩阵运算去得到矩，而是利用电路自身的拓扑结构，通过反复迭代的直流分析，最后计算出电路的矩。能够应用这一技巧的主要原因是观察到 RC 互连线模型在拓扑结构上大致可以看成由电阻 R 组成的支撑树 (spanning-tree) 和由电容 C 组成的连枝 (branch) 构成。所以可以用对树结构遍历的方法快速求解矩，而对于电路中不符合这一要求的那些支路，也能通过其他的方法处理，但会牺牲掉一些性能。

#### ● 迭代求矩过程：

1. 把输入替换成与稳态值相等的直流激励源，所有电容替换成电流为 0 的电流源，所有电感替换成电压为 0 的电压源。
2. 对电路做直流分析，求得所有电压源的电流，作为其对应电感在本次迭代中的矩。同样也求得所有电流源的电压，作为其对应电容在本次迭代中的矩。
3. 把输入替换成 0 值激励源，并把电容电压源和电感电流源的值设为上一次迭代的

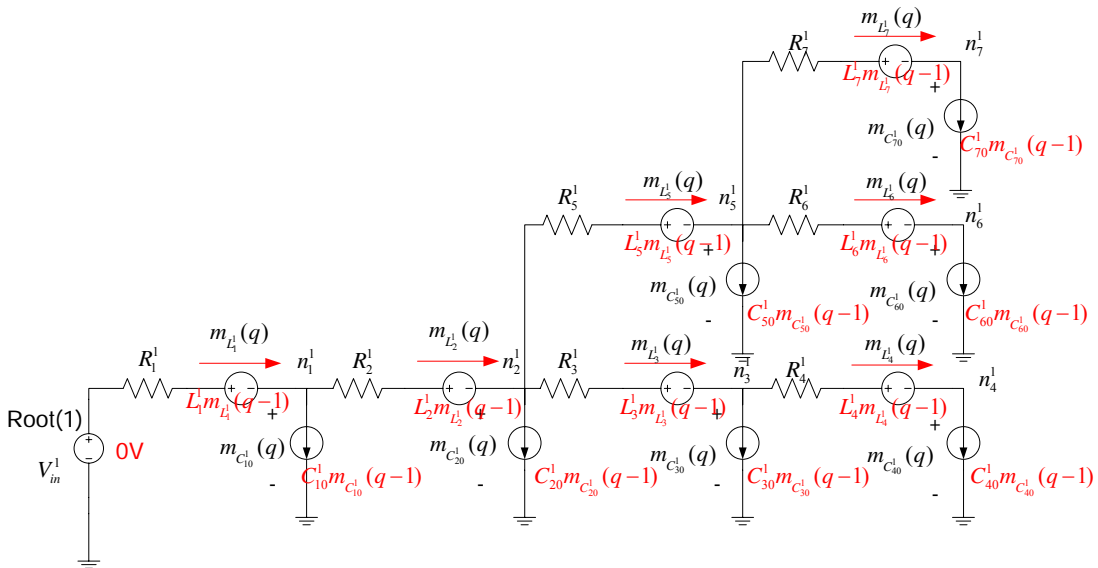
矩分别与电容、电感自身的值相成后的结果，然后返回执行第 2 步。

4. 以此类推，迭代  $q$  次后将得到电路的  $q$  阶矩。



图表 13 替换电感电容为特定的独立源

Fig. 13 Replace each capacitor and inductor by independent source



图表 14 更新独立源的值

Fig. 14 Update the value of independent sources

● 直流分析

很显然，在求矩的每次迭代过程中，最主要的工作就是解一个直流电路。电路中



包含电阻、电压源和电流源。一般来说，直流分析有很多方法，关键是接一个线性方程。考虑互连线网络具有树状的结构，因此可以采用一种特殊的方法来求解，以提高 AWE 的效率。

比如对于图 11 中的一个 RLC 电路，如果把电阻、电感以及独立电压源所在的支路组成支撑树，电容所在的支路构成连枝，则它的拓扑结构如图 15 所示。由于互连线的寄生参数大多数情况下，电阻和电感是沿着导线的，而电容多是对地电容和两根导线之间的耦合电容，所以上述假设去掉一些特殊的支路后几乎总能成立。

把 RLC 电路看成这样的树状结构的好处就是能够利用迭代的特点快速求解。在迭代过程中，电容  $C_j^i$  被替换成了电流源

$$I_{C_j^i}(k) = C_j^i \cdot m_{C_j^i}(k-1) \quad (2.52)$$

电感  $L_j^i$  被替换成了电压源

$$V_{L_j^i}(k) = L_j^i \cdot m_{L_j^i}(k-1) \quad (2.53)$$

所以对于所有的电容连枝，支路的电流都是已知的。而对于支撑树来说，电感支路的电压自然是已知的，而电阻支路如果能够求得电流的话那么电压也可以知道。

基于这个思想，只需要对支撑树进行两次深度遍历就可以完成一次直流分析：

### 1. 反向深度遍历

首先从一个叶节点开始，访问某一个节点  $n_j^i$  的时候，把它所有从子节点来的树枝的电流与同它相连的连枝的电流求和，并由 KCL 定律可以马上知道求和结果就等于该节点向上树枝的电流。

反向遍历保证了遍历的时候只有当从一个节点所有子节点来的支路的电流都已知时才计算该节点到父节点支路的电流。这一遍历过程一直进行到根节点为止，这样所有支路的电流都是已知的了。其中电感支路的电流就是我们要求的矩，而电阻支路的电流将在前向深度遍历中用来计算电阻两端的电压。

$$I_j^i(k) = m_{L_j^i}(k) = \sum_{C_d^i \in CD_j^i} C_d^i m_{C_d^i}(k-1) \quad (2.54)$$

### 2. 前向深度遍历

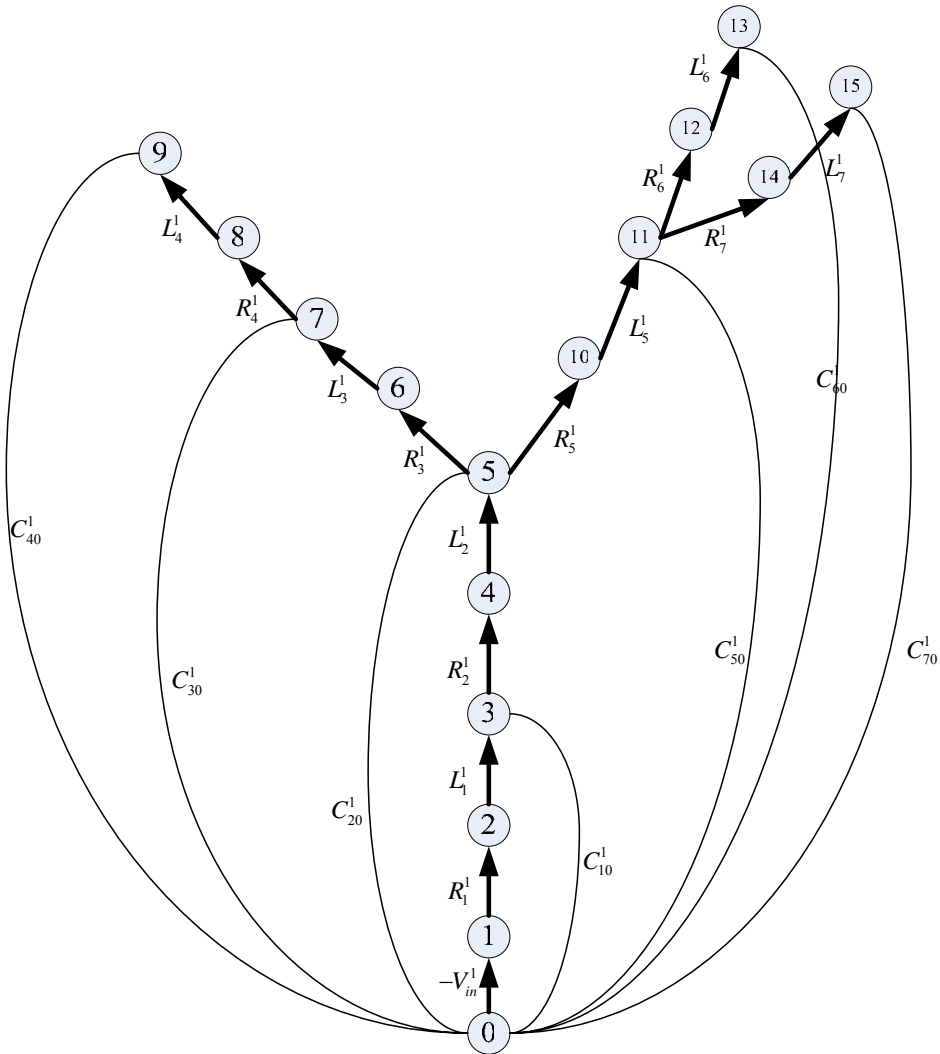
从根节点开始，计算每一个节点的子节点的电压。子节点的电压等于父节点的电压减去父节点到子节点的支路上的电压降。对于电压源支路和电感之路，因为在迭代之前电感已经被替换成了电压源，所以它们的支路电压都是已知的。对于电阻支路，因为在反向深度遍历中已经求得了支路电流，所以只需要乘以电阻的阻值就能得到支路电压。节点访问的顺序为反向深度遍历的逆序，这保证了只有当一个节点

的父节点电压已知时才计算该点的电压。

遍历一直进行到访问过所有的节点为止，这样每一节点的电压就是已知的了，把电容两端的电压相减就能求出电容支路上的电压，也即电容对应的电流源的电压。

$$\begin{aligned}
 V_j^i(k) = m_{C_j^i}(k) &= \sum_{R_l^i \in PR_j^i} R_l^i I_l^i(k) - \sum_{L_l^i \in PL_j^i} L_l^i I_l^i(k-1) \\
 &= \sum_{R_l^i \in PR_j^i} R_l^i \left( \sum_{C_d^i \in CD_l^i} C_d^i m_{C_d^i}(k-1) \right) - \sum_{L_l^i \in PL_j^i} L_l^i \left( \sum_{C_d^i \in CD_l^i} C_d^i m_{C_d^i}(k-2) \right) \quad (2.55)
 \end{aligned}$$

研究后可以发现，上述遍历过程只取决于电路本身的拓扑结构，是在电路存在的时候就已经确定的。虽然每次迭代中各电流源、电压源的值发生变化，但不改变计算的公式。因此，如果每次迭代都重新遍历就显得有些多余。一种更为有效率的方法是可以仅对支撑树遍历一次，记录下每个支路电流、电压的计算公式，然后迭代的时候把具体的数值代入即可。



图表 15 RLC 树状电路的拓扑结构

Fig. 15 Topology of RLC-tree circuit

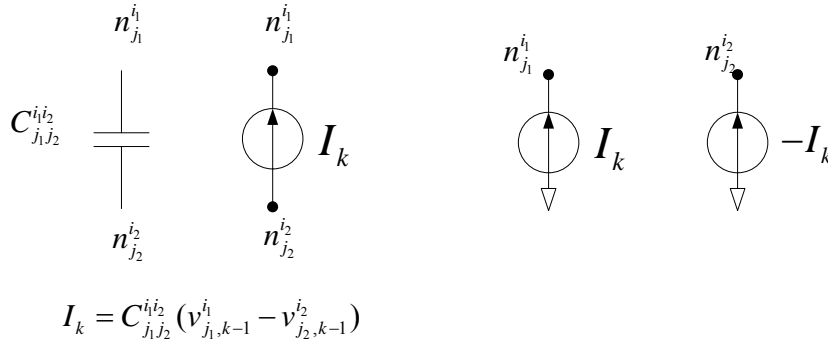
### ● 去耦合

由于电容耦合和互感效应对信号的时延和串扰有着重要的影响,我们在建模 RLC 树状电路网络时必须要考虑非地点 (No-ground Node) 之间的浮动电容 (Floating Capacitor) 和对应电感之间的互感 (Mutual Inductor)。Qingjian Yu 和 Ernest S. Kuh<sup>[25-27]</sup> 提出了计算耦合 RC 树状电路矩的数值递归算法。这个算法同样适用于耦合 RLC 树状电路。

我们知道,在  $k$  ( $k \geq 1$ ) 次迭代过程中,电容  $C_j^i$  等效为电流源(2.52),耦合电容  $C_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}$  等效为电流源:

$$I(k) = C_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} (m_{C_{j_1}^{i_1}}(k-1) - m_{C_{j_2}^{i_2}}(k-1)) \quad (2.56)$$

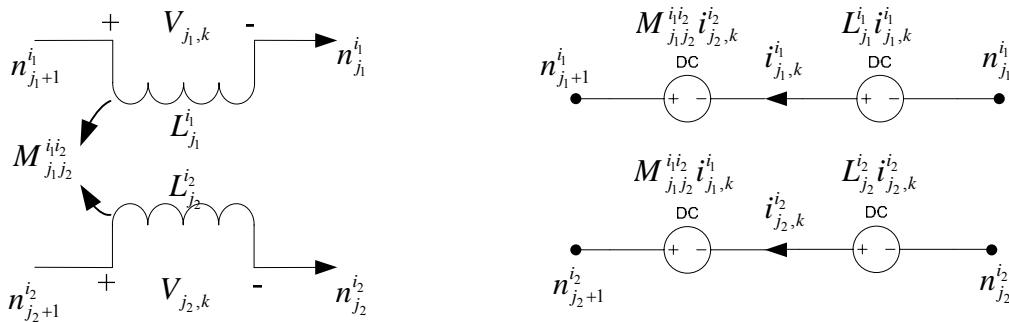
其中电流的方向为  $n_{j_1}^{i_1}$  点流向  $n_{j_2}^{i_2}$ 。根据电源分配理论，我们可以将由耦合电容  $C_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}$  产生的浮动电流源（floating current source）分成两个对地电流源，分别是从  $n_{j_1}^{i_1}$  点流向地的  $I(k)$  和从  $n_{j_2}^{i_2}$  点流向地的  $-I(k)$ 。浮动电流源的分割等同于将原来相互耦合的 RLC 树状电路去耦合。



图表 16 耦合电容的矩模型

Fig. 16 Source splitting for a coupling capacitor

同样，电感  $L_j$  等效为电压源（2.6），互感  $M_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}$  等效为两个电压源，分别是与  $L_{j_1}^{i_1}$  串联的  $M_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} m_{L_{j_2}^{i_2}}(k-1)$  和与  $L_{j_2}^{i_2}$  串联的  $M_{j_1 j_2}^{i_1 i_2} m_{L_{j_1}^{i_1}}(k-1)$ 。由互感  $M_{j_1 j_2}^{i_1 i_2}$  产生的浮动电压源（floating voltage source）的分割也等同于将原来相互耦合的 RLC 树状电路去耦合。



图表 17 耦合电感的矩模型

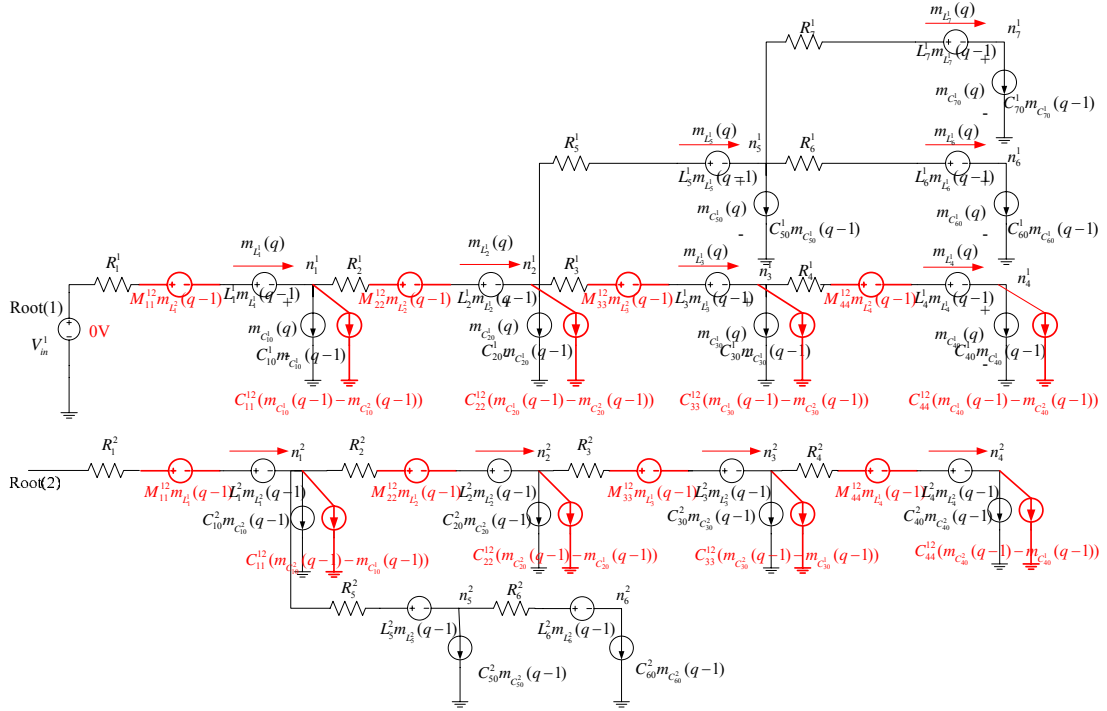
Fig. 17 Source substitution for a pair of coupled inductors

基于这个理论，我们可以得到一组多耦合 RLC 树状电路电容  $C_j^i$  和电感  $L_j^i$  的  $k$  ( $k \geq 1$ ) 阶矩公式：

$$m_{C_j^i}(k) = \sum_{n_p^i \in N^i} R_{pj}^i m_{L_p^i}(k) - \sum_{n_p^i \in N^i} \left( L_p^i \cdot m_{L_p^i}(k-1) + \sum_{M_{pp_1}^{i_1} \in M_p^i} M_{pp_1}^{i_1} m_{L_{p_1}^i}(k-1) \right) \quad (2.57)$$

$$m_{L_j^i}(k) = \sum_{n_p^i \in N^i} \left\{ C_p^i m_{C_p^i}(k-1) + \sum_{C_{pp_1}^{i_1} \in CC_j^i} C_{pp_1}^{i_1} \left( m_{C_p^i}(k-1) - m_{C_{p_1}^i}(k-1) \right) \right\} \quad (2.58)$$

所以如图 12 所示的耦合 RLC 树状电路可以通过去耦合，分解为如图 18 所示的树状电路。



图表 18 去耦合后的 RLC 树状电路

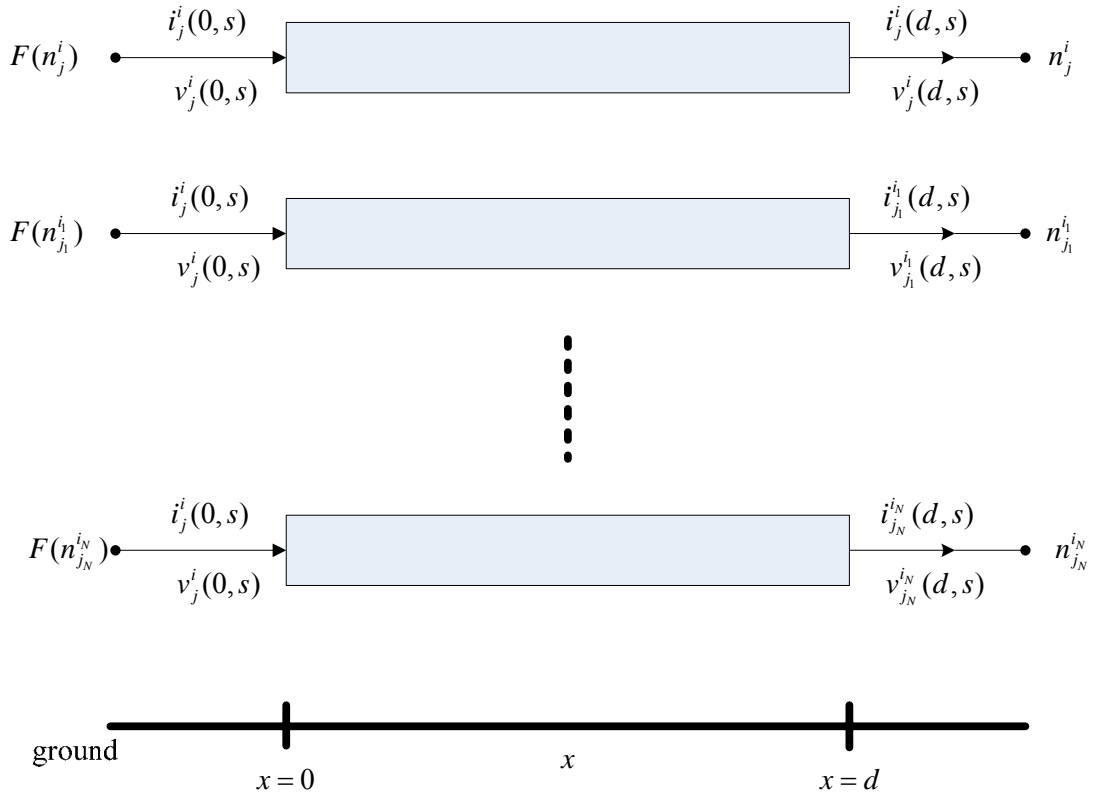
Fig. 18 Decoupled RLC-tree circuit

### ● 传输线模型

以上我们考虑的是 RLC 互连线的集总模型 (Lumped Lines)，为了更加精确的对互连线进行建模，我们引入了传输线理论，考虑 RLC 互连线的分布模型 (Distributed Lines) (即传输线模型)。Qingjian Yu 和 Ernest S. Kuh<sup>[25]</sup>提出了带有分布模型互连线的耦合 RC 树的矩计算公式。Herng-Jer LEE 和 Chia-Chi Chu<sup>[28, 29]</sup>将其推广到耦合 RLC 互连线。

我们假设节点  $n_j^i$  和其父节点  $F(n_j^i)$  之间的集总电路用分布互连线代替，则整个树

状电路是由集总电路和分布电路共同组成的。令  $V_j^i(s)$  是节点  $n_j^i$  处的电压传输方程， $I_j^i(s)$  是通过电阻  $R_j^i$  的电流。由上面的分析可以看出，电压的  $k$  阶矩  $V_{jk}^i$  等于电容  $C_{j0}^i$  的  $k$  阶矩  $m_{C_j^i}^i(k)$ ，电流的  $k$  阶矩  $I_{jk}^i$  等于电感  $L_j^i$  的  $k$  阶矩  $m_{L_j^i}^i(k)$ 。



图表 19 耦合 RLC 树中的传输线

Fig 19 Coupled uniform transmission lines in coupled RLC trees

考虑  $N$  根互相耦合的分布互连线系统（如图 19 所示），其中  $x=0$  和  $x=d$  分别表示互连线的近端（near end）和远端（far end）， $r_j^i$ ， $l_j^i$  和  $c_j^i$  分别表示互连线  $Line_j^i$  单位长度的电阻、电感和电容。 $c_{j_1}^{i_1}$  和  $m_{j_1}^{i_1}$  分别表示互连线  $Line_j^i$  和  $Line_{j_1}^{i_1}$  单位长度的互容和互感。 $cc_j^i$  和  $ml_j^i$  分别表示与互连线  $Line_j^i$  耦合的所有互容和互感。

通过 Laplace 变换，互连线  $Line_j^i$  的电报方程可以写为：

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_j^i(x, s)}{\partial x} &= -(r_j^i + sl_j^i)(x, s) - \sum_{ml_j^i} (sm_{jl_j^i}^{i_h} i_{jl_j^i}^i(x, s)) \\ \frac{\partial i_j^i(x, s)}{\partial x} &= -s \left( c_j^i + \sum_{cc_j^i} c_{jl_j^i}^{i_h} \right) v_j^i(x, s) + \sum_{cc_j^i} (sc_{jl_j^i}^{i_h} v_{jl_j^i}^i(x, s)) = i_{cj}^i(x, s)\end{aligned}\quad (2.59)$$

我们设  $v_{jk}^i(x)$ ,  $i_{jk}^i(x)$  和  $i_{cj}^i(x)$  分别表示  $v_j^i(x, s)$ ,  $i_j^i(x, s)$  和  $i_{cj}^i(x, s)$  的  $k$  阶矩。则  $v_j^i(x, s)$  和  $i_j^i(x, s)$  的  $k$  阶矩递推公式为：

当  $k=0$  时，

$$i_{cj0}^i(x) = i_{j0}^i(d) = 0, v_{j0}^i(x) = i_{j0}^i(0) = V_s^i \quad (2.60)$$

当  $k>0$  时，

$$\begin{aligned}i_{cj k}^i(x) &= \left( c_j^i + \sum_{cc_j^i} c_{jl_j^i}^{i_h} \right) v_{j k-1}^i(x) - \sum_{cc_j^i} (c_{jl_j^i}^{i_h} v_{j k-1}^i(x)) \\ &= c_j^i v_{j k-1}^i(x) + \sum_{cc_j^i} c_{jl_j^i}^{i_h} (v_{j k-1}^i(x) - v_{jl_j^i k-1}^i(x))\end{aligned}\quad (2.61)$$

$$i_{jk}^i(x) = i_{jk}^i(d) + \int_x^d i_{cj k}^i(z) dz \quad (2.62)$$

$$\begin{aligned}v_{jk}^i(x) &= v_{jk}^i(0) - r_j^i \int_0^x i_{cj k}^i(z) dz - xr_j^i i_{jk}^i(x) - l_j^i \int_0^x z i_{cj k-1}^i(z) dz - xl_j^i i_{j k-1}^i(x) \\ &\quad - \sum_{ml_j^i} (m_{jl_j^i}^{i_h} \int_0^x z i_{cj k-1}^i(z) dz + xm_{jl_j^i}^{i_h} i_{j k-1}^i(x))\end{aligned}\quad (2.63)$$

我们用多项式近似  $i_{cj k}^i(x)$  和  $v_{jk}^i(x)$ ，从而积分转换为求和。

$$i_{cj k}^i(x) = \sum_{n=0}^{m_k} \alpha_{j k n}^i x^n \quad (2.64)$$

$$v_{jk}^i(x) = \sum_{n=0}^{p_k} \beta_{j k n}^i x^n \quad (2.65)$$

当  $k=0$  时， $i_{cj0}^i(x) = 0$ ， $v_{j0}^i(x) = V_s^i$ 。从而  $\alpha_{j00}^i = 0$ ， $\beta_{j00}^i = V_s^i$ 。当  $k>0$  时，

$$\alpha_{j k n}^i = (c_j^i + \sum_{cc_j^i} c_{jl_j^i}^{i_h}) \beta_{j k-1 n}^i - \sum_{cc_j^i} c_{jl_j^i}^{i_h} \beta_{j k-1 n}^i \quad (2.66)$$

同样，(2.62)和(2.63)两式中的积分可以化为：

$$\int_x^d i_{cjk}^i(z) dz = \sum_{n=0}^{m_k} \frac{\alpha_{jkn}^i}{n+1} (d^{n+1} - x^{n+1}) \quad (2.67)$$

$$\int_0^x z i_{cjk}^i(z) dz = \sum_{n=0}^{m_k} \frac{\alpha_{jkn}^i}{n+2} x^{n+2}$$

所以

$$\beta_{jk0}^i = v_{jk}^i(0) \quad (2.68)$$

$$\begin{aligned} \beta_{jk1}^i = & -r_j^i \left( i_{jk}^i(d) + \sum_{n=0}^{m_k} \frac{\alpha_{jkn}^i}{n+1} d^{n+1} \right) - l_j^i \left( i_{jk-1}^i(d) + \sum_{n=0}^{m_{k-1}} \frac{\alpha_{jk-1n}^i}{n+1} d^{n+1} \right) \\ & - \sum_{ml_j^i} m_{ji}^{ii} \left( i_{jk-1}^i(d) + \sum_{n=0}^{m_{k-1}} \frac{\alpha_{jk-1n}^i}{n+1} d^{n+1} \right) \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\beta_{jkn+2}^i = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left( r_j^i \alpha_{jkn}^i + l_j^i \alpha_{jk-1n}^i + \sum_{ml_j^i} m_{ji}^{ii} \alpha_{jk-1n}^i \right) \quad (2.70)$$

文献<sup>[25]</sup>已经证明多项式的阶数  $m_k$  和  $p_k$  与矩的阶数  $k$  具有如下关系：

1. 当  $k=0$  时,  $m_1=0$  ;
2.  $p_k = m_k + 2$  ;
3.  $i_{cjk+1}^i(x)$  多项式的阶数为  $p_k$  ;
4.  $m_k = 2(k-1), p_k = 2k$

当系数  $\alpha$ s 和  $\beta$ s 计算完后, 耦合 RLC 互连线的矩可以由式(2.62)得到 (令  $x=0$ ) :

$$i_{jk}^i(0) = i_{jk}^i(d) + J_{jk}^i \quad (2.71)$$

其中

$$J_{jk}^i = \int_0^d i_{cjk}^i(z) dz = \sum_{n=0}^{2(k-1)} \frac{\alpha_{jkn}^i}{n+1} d^{n+1} \quad (2.72)$$

表示互连线  $Line_j^i$  上的容性电流。

$$V_{jk}^i(d) = v_{jk}^i(0) - dr_j^i i_{jk}^i(d) - E_{LMjk}^i - E_{jk}^i \quad (2.73)$$

其中

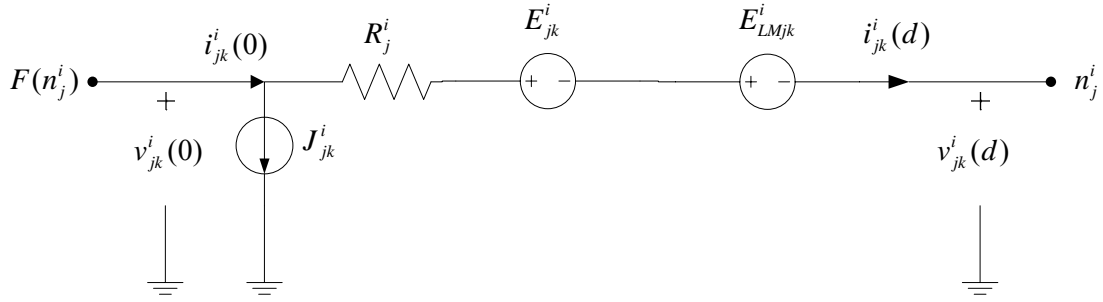


$$E_{LMjk}^i = dl_j^i i_{jk-1}^i(d) + \sum_{m_j^i} dm_{j_1}^{i_1} l_{j_1 k-1}^i(d) \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} E_{jk}^i &= r_j^i \int_0^d z i_{cjk}^i(z) dz + l_j^i \int_0^d z i_{cjk-1}^i(z) dz + \sum_{m_j^i} m_{j_1}^{i_1} \int_0^d z i_{c_j k-1}^i(z) dz \\ &= r_j^i \sum_{n=0}^{2(k-1)} \frac{\alpha_{jkn}^i}{n+2} d^{n+2} + l_j^i \sum_{n=0}^{2(k-2)} \frac{\alpha_{jk-1n}^i}{n+2} d^{n+2} + \sum_{m_j^i} m_{j_1}^{i_1} \sum_{n=0}^{2(k-2)} \frac{\alpha_{j_1 k-1n}^i}{n+2} d^{n+2} \end{aligned} \quad (2.75)$$

$E_{LMjk}^i$  和  $E_{jk}^i$  是由  $k$  阶容性电流矩流过电阻以及  $k-1$  阶容性电流矩流过电感引起的电压降。对于 RC 互连线,  $E_{LMjk}^i = 0$ 。

由此, 耦合 RLC 树分布传输线的矩模型如图 20 所示。



图表 20 耦合 RLC 树分布传输线的矩模型

Fig 20 The moment model of distributed coupled RLC interconnects

#### 2.2.4 模型降阶

我们将  $q$  个矩向量构成的矩空间  $\mathbf{M} = [\mathbf{m}^{(0)}, \mathbf{m}^{(1)}, \dots, \mathbf{m}^{(q-1)}]$  进行 Gram-Schmidt 正交化 (见附录一) 得:

$$\mathbf{V}_{n \times q} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q] \quad (2.76)$$

我们令  $\mathbf{V}^T = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{2n}]$ , 于是有  $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_q$ 。我们把矩阵  $\mathbf{V}_{n \times q}$  作为原系统式 2.22 的投影矩阵, 得到如下的降阶模型:

$$\hat{\mathbf{E}}_1 \frac{d\hat{\boldsymbol{\xi}}(t)}{dt} + \hat{\mathbf{A}}_1 \hat{\boldsymbol{\xi}}(t) = \hat{\mathbf{F}}_1 \mathbf{u}(t) \quad (2.77)$$

其中  $\hat{\mathbf{E}}_1 = \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{E}}_1 \mathbf{V}$ ,  $\hat{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{V}$ ,  $\hat{\mathbf{F}}_1 = \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{F}}_1$ 。

我们可以看到, 变换矩阵是由电容的矩和电感的矩两部分构成的, 我们定义为:

$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{(C)} \\ \mathbf{V}^{(L)} \end{bmatrix}$ 。将 2.22 式带入我们可以得到:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{E}}_1 &= \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{E}}_1 \mathbf{V} = \mathbf{V}^{(C)T} \mathbf{C}_1 \mathbf{V}^{(C)} + \mathbf{V}^{(L)T} \mathbf{L}_1 \mathbf{V}^{(L)} \\ &= \sum_{i=1}^n C_i^1 w_i w_i^T + \sum_{i=1}^n L_i^1 w_{n+i} w_{n+i}^T\end{aligned}\quad (2.78)$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{A}}_1 &= \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{V} = \mathbf{V}^{(C)T} \mathbf{A}_1 \mathbf{V}^{(L)} - [\mathbf{V}^{(C)T} \mathbf{A}_1 \mathbf{V}^{(L)}]^T + \mathbf{V}^{(L)T} \mathbf{R}_1 \mathbf{V}^{(L)} \\ &= \sum_{i=1}^n (w_{p(i)} - w_i) w_{n+i} - \left( \sum_{i=1}^n (w_{p(i)} - w_i) w_{n+i} \right)^T + \sum_{i=1}^n R_i^1 w_{n+i} w_{n+i}^T\end{aligned}\quad (2.79)$$

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{F}}_1 = -w_{n+1} \quad (2.80)$$

通过式 2.78 到式 2.80 的计算，我们可以用数值计算来代替矩阵计算，而数值计算只需要对 RLC 树进行一次遍历即可。

同样，对于含有  $N$  棵耦合 RLC 树状电路的系统，我们将  $q$  个矩向量构成的矩空间  $\mathbf{M} = [\mathbf{m}^{(0)}, \mathbf{m}^{(1)}, \dots, \mathbf{m}^{(q-1)}]$  进行 Gram-Schmidt 正交化得： $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_q]$ ，我们令  $\mathbf{V}^T = [\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_{Nn}]$ ，于是有  $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}_q$ 。

我们把矩阵  $V$  作为原系统的投影矩阵，得到如下的降阶模型：

$$\hat{\mathbf{E}} \frac{d\xi(t)}{dt} + \hat{\mathbf{A}} \xi(t) = \hat{\mathbf{F}} u(t) \quad (2.81)$$

其中  $\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{V}$ ， $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{V}$ ， $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{F}}$ 。

我们可以看到，变换矩阵是由电容的矩和电感的矩两部分构成的，我们定义为：

$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{(C)} \\ \mathbf{V}^{(L)} \end{bmatrix}$ 。于是降阶后表示系统储能元件的矩阵为：

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{V} = \mathbf{V}^{(C)T} \mathbf{C} \mathbf{V}^{(C)} + \mathbf{V}^{(L)T} \mathbf{L} \mathbf{V}^{(L)} \quad (2.82)$$

其中

$$\hat{\mathbf{E}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{N^i} \left\{ \begin{aligned} &C_{j_0}^i m_{C_{j_0}^i}(\mathbf{a}) m_{C_{j_0}^i}(\mathbf{b}) + \sum_{C_{j_1}^i \in CC_j^i} \left\{ C_{j_1}^{i1} (m_{C_j^i}(\mathbf{a}) - m_{C_{j_1}^i}(\mathbf{a})) (m_{C_j^i}(\mathbf{b}) - m_{C_{j_1}^i}(\mathbf{b})) \right\} \\ &+ L_j^i m_{L_j^i}(\mathbf{a}) m_{L_j^i}(\mathbf{b}) + \sum_{M_{j_1}^i \in ML_j^i} M_{j_1}^{i1} m_{L_j^i}(\mathbf{a}) m_{L_{j_1}^i}(\mathbf{b}) \end{aligned} \right\}$$

而降阶后表示系统耗能原件的矩阵为：

$$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{V} = \mathbf{V}^{(C)T} \mathbf{A} \mathbf{V}^{(L)} - [\mathbf{V}^{(C)T} \mathbf{A} \mathbf{V}^{(L)}]^T + \mathbf{V}^{(L)T} \mathbf{R} \mathbf{V}^{(L)} \quad (2.83)$$

其中

$$\hat{\mathbf{A}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^n \left\{ \begin{aligned} &m_{C_{i_0}}(\mathbf{a}) m_{L_i}(\mathbf{b}) - m_{C_{i_0}}(\mathbf{b}) m_{L_i}(\mathbf{a}) + R_i^1 m_{L_i}(\mathbf{a}) m_{L_i}(\mathbf{b}) + \\ &\sum_{j=2}^{n(i)} \left\{ m_{L_j^i}(\mathbf{a}) (m_{C_{p_0}^i}(\mathbf{b}) - m_{C_j^i}(\mathbf{b})) - m_{L_j^i}(\mathbf{b}) (m_{C_{p_0}^i}(\mathbf{a}) - m_{C_j^i}(\mathbf{a})) + R_j^1 m_{L_j^i}(\mathbf{a}) m_{L_j^i}(\mathbf{b}) \right\} \end{aligned} \right\}$$

而降阶后表示系统外部输入的矩阵为：

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{V}^T \tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} m_{L1}^{(0)} & m_{L2}^{(0)} & \cdots & m_{Ln}^{(0)} \\ m_{L1}^{(1)} & m_{L2}^{(1)} & \cdots & m_{Ln}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{L1}^{(q-1)} & m_{L2}^{(q-1)} & \cdots & m_{Ln}^{(q-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -e_1^1 \\ -e_1^2 \\ \vdots \\ -e_1^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sum_{i=1}^n m_{L_i}^{(0)} \\ -\sum_{i=1}^n m_{L_i}^{(1)} \\ \vdots \\ -\sum_{i=1}^n m_{L_i}^{(q-1)} \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

假设原系统的阶数为  $n$ ，投影矩阵的阶数为  $q$ ，如果直接通过矩阵乘法来计算降阶后的系统，则计算复杂度为  $O(q^2 n^2)$ 。如果通过式 2.82 到式 2.84 来计算，也即通过对树状电路的一次遍历来计算，则计算复杂度为  $O(q^2 n)$ 。当  $n \gg q$  时，显然后一种计算方法效率更高。

对于含有传输线的耦合 RLC 树状电路网络，文献<sup>[30]</sup>中将无限阶的分布式互连系统用有限阶的宏模型来代替。因此系统用 MNA 矩阵可以表示为：

$$\left( \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{M}}_d & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{N}}_d & -\mathbf{A}_d & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_d^T & \mathbf{G} & \mathbf{A}_1^T \\ \mathbf{0} & -\mathbf{A}_1^T & \mathbf{R} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}_d(s) \\ \mathbf{V}_n(s) \\ \mathbf{I}_L(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_s \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{V}_s(s) \quad (2.85)$$

其中  $(s\hat{\mathbf{M}}_d + \hat{\mathbf{N}}_d)\hat{\mathbf{X}}_d(s) = \mathbf{A}_d \mathbf{V}_n(s)$  是分布式互连线降阶后的状态方程， $\mathbf{V}_n$  和  $\mathbf{I}_L$  分别表示系统的节点电压向量和  $R \rightarrow L$  支路上的电流向量。矩阵  $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{L}$ 、 $\mathbf{G}$  和  $\mathbf{C}$  分别是系统集总电阻、电感、电导和电容矩阵。 $\mathbf{A}_d$ 、 $\mathbf{A}_1$  和  $\mathbf{A}_s$  分别是系统的关联矩阵。

我们设向量  $\mathbf{X}_k = [\hat{\mathbf{X}}_{d,k} \quad \mathbf{V}_{n,k} \quad \mathbf{I}_{L,k}]^T$  是系统  $\mathbf{X}$  的  $k$  阶矩向量。我们设系统的投影矩阵为  $\mathbf{Q} = [\mathbf{X}_0 \quad \mathbf{X}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{X}_{q-1}]$ ，则降阶后的系统矩阵为：

$$\hat{\mathbf{M}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{M} \mathbf{Q}, \quad \hat{\mathbf{N}} = \mathbf{Q}^T \mathbf{N} \mathbf{Q} \quad (2.86)$$

其中  $\hat{\mathbf{M}}$  的第  $k$  行第 1 列的元素为  $\hat{M}(k,1) = \mathbf{X}_{k-1}^T \mathbf{M} \mathbf{X}_{1-1}$ ， $\hat{\mathbf{N}}$  的第  $k$  行第 1 列的元素为  $\hat{N}(k,1) = \mathbf{X}_{k-1}^T \mathbf{N} \mathbf{X}_{1-1}$ 。这里我们以  $\hat{N}(k,1)$  为例， $\hat{M}(k,1)$  可以以同样的方法计算。由 2.15 式可知  $\mathbf{N} \mathbf{X}_{k+1} = -\mathbf{M} \mathbf{X}_k$ ，所以：

$$\begin{aligned} \hat{N}(k,1) &= -\mathbf{X}_{k-1}^T \mathbf{M} \mathbf{X}_{1-2} \\ &= -(\hat{\mathbf{X}}_{d,k-1}^T \mathbf{M}_d \hat{\mathbf{X}}_{d,1-2} + \mathbf{V}_{n,k-1}^T \mathbf{C} \mathbf{V}_{n,1-2} + \mathbf{I}_{L,k-1}^T \mathbf{L} \mathbf{I}_{L,1-2}) \end{aligned} \quad (2.87)$$

其中与集总模型有关的两项  $\mathbf{V}_{n,k-1}^T \mathbf{C} \mathbf{V}_{n,1-2}$  和  $\mathbf{I}_{L,k-1}^T \mathbf{L} \mathbf{I}_{L,1-2}$  按照公式 2.82 和式 2.83 的方法计

算,  $\hat{\mathbf{X}}_{d,k-1}^T \mathbf{M}_d \hat{\mathbf{X}}_{d,l-2}$  使用文献<sup>[28]</sup>中的方法计算。 $\hat{\mathbf{X}}_{d,k-1}^T \mathbf{M}_d \hat{\mathbf{X}}_{d,l-2}$  可被看成每一根传输线的贡献。其中传输线  $Line_j^i$  的贡献为：

$$\int_0^d v_{j,k-1}^i(z) i_{cj,l-1}^i(z) dz = \sum_{n=0}^{2(k+l-3)} \frac{a_{j,n}^i}{n+1} d^{n+1} \quad (2.88)$$

其中

$$a_{j,n}^i = \sum_{p=\max(0,n-2(l-2))}^{\min(2(k-1),n)} \beta_{j,k-1}^i \alpha_{j,l-1,n-p}^i \quad (2.89)$$

和

$$\int_0^d i_{j,k-1}^i(z) E_{LMj,l-2}^i(z) dz = \sum_{n=0}^{2(k+l-4)} \frac{b_{j,n}^i}{n+1} d^{n+1} \quad (2.90)$$

其中  $b_{j,n}^i$  是多项式  $i_{j,k-1}^i(z) E_{LMj,l-2}^i(z)$  中  $z^n$  项前的系数。

### 2.3. 本章小结

本章介绍了模型降阶的基本思想和算法，并以矩匹配的模型降阶算法为切入点，通过对单棵 RLC 树状电路和耦合 RLC 树状电路的分析，从原理上得出了耦合 RLC 树状电路矩的求解公式，并受到矩阵计算的启发，结合电路的拓扑结构，提出了互感和互容去耦合的等效电路。在此基础上，对 Pillage<sup>[24]</sup>和 Q.Yu<sup>[25]</sup>提出的算法进行了推广，得到了基于电路拓扑结构的耦合 RLC 树状电路矩的求解公式，并将其用于传输线的分析。同时利用矩构造投影矩阵，对原电路模型进行降阶，降阶过程利用树状电路的特殊结构实现了简化。

### 3 矩的符号化计算方法

本章在第 2 章的基础上,从文献<sup>[24, 26, 28]</sup>提出的矩的数值迭代算法入手,提出基于矩决策图的矩符号化计算方法,并将其推广到分析耦合 RLC 树状电路。并将构造一个基于符号化矩计算方法的互连线仿真器。

#### 3.1 基于矩决策图的矩符号化计算方法

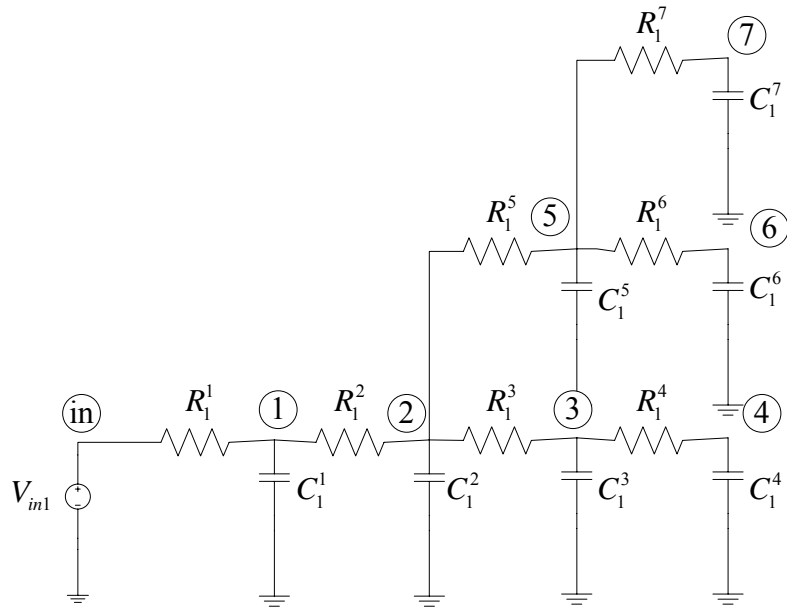
我们有了多耦合 RLC 树状电路网络的矩的计算公式。然而数值递归算法的复杂性在于在矩计算时必须识别所有相关的路径和路径上的电路元件。对于大规模电路而言,必须要有特定的机制记录相关的追踪路径。Ratzlaff 和 Pillage 提出的虚拟路径追踪 (virtual path-tracing) 算法在计算一阶矩的同时,用伪指令 (pseudo-instructions) 存储树枝的位置和阶数。然而这种方法需要复杂的编程实现,不易于符号化 (symbolic)。

##### 3.1.1 矩决策图

Shi<sup>[31]</sup>提出了基于矩决策图的单棵 RLC 树状电路矩的符号化计算方法。它利用二叉决策图 (Binary Decision Diagram, BDD) 共享子图的特点,高效地将电路结构存储为图的数据结构,实现了矩计算的符号化。

为了能够简化路径追踪的过程,我们用一棵由所有电容组成的电容树 (CTree) 和所有电阻组成的多根节点 BDD 来表示所有的追踪路径和数值计算。我们把这个用于计算电路矩的数据结构称为矩决策图 (Moment Decision Diagram, MDD)。

我们观察公式的两个嵌套加和 (double-summation) 部分,其中一个是针对电阻而另一个是针对电感的。发现两部分本质上是相同的。其中电阻  $R_j^i$  乘上电容  $C_j^i$  的  $(k-1)$  阶矩  $m_{C_j^i}(k-1)$ , 而电感  $L_j^i$  是乘上电容  $C_j^i$  的  $(k-2)$  阶矩  $m_{C_j^i}(k-2)$ 。既然可以用符号化的方法计算第一部分的和,那么将电阻替换为电感,这一方法同样可以计算第二部分的和。因此,我们将图 11 的 RLC 树状电路简化为 RC 电路来分析。

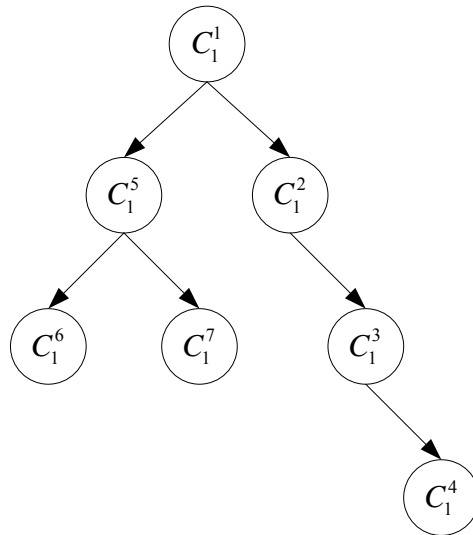


图表 21 与 RLC 树等价的 RC 树

Fig. 21 The equivalent RC-tree circuit

### 3.1.2 矩决策图的构造方法

第一步：建立一棵与电路结构相同的电容树 (CTree)。

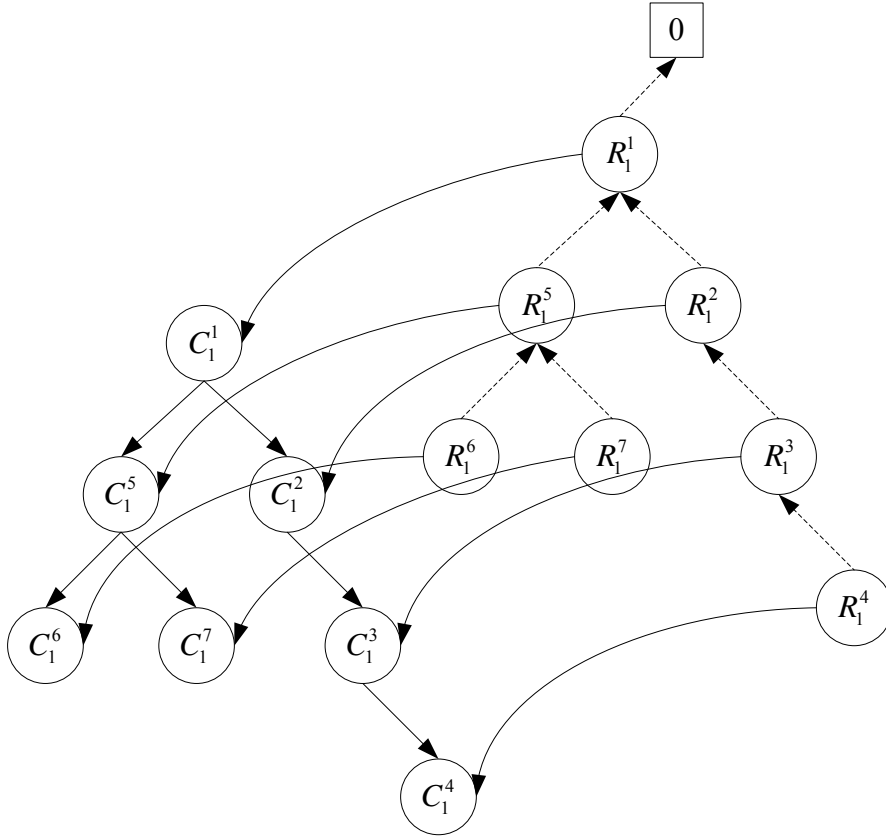


图表 22 电容树 CTree

Fig. 22 The C-tree for the circuit in Fig 3.1

第二步：建立一棵由电阻构成的多根节点的二叉决策图。这个二叉决策图与电容树的拓扑结构完全相同。如果在电容树中，电容  $C_j^i$  是  $C_p^i$  的直接子节点，那么 BDD 中

电阻节点  $R_j^i$  的“Then”边指向电容树的  $C_j^i$  点，“Else”边指向 BDD 中的  $R_p^i$  点。每一个电阻节点  $R_j^i$  都是 BDD 的根节点。只有  $R_1^1$  点的“Else”边指向“0”节点。



图表 23 矩决策图， $R_j^1$  的实线箭头表示它的“Then”边，虚线箭头表示他的“Else”边

Fig. 23 A moment decision diagram (MDD). A solid pointer from node  $R_j^1$  denotes a *Then edge* and a dashed pointer from node  $R_j^1$  denotes an *Else edge*.

以上两步在实际操作过程中可以同时完成，由于电阻构成的决策图具有和电路结构相同的树形结构，所以可以一次构造完成，且不需要查找表机制。

### 3.1.3 k 阶矩的计算方法

第一步：(电容树求值) 后序遍历电容树一次，先将电容节点  $C_j^i$  的值用等效电流源代替，即

$$cap_j^i = C_j^i m_{c_j^i} (k-1) \quad (3.1)$$

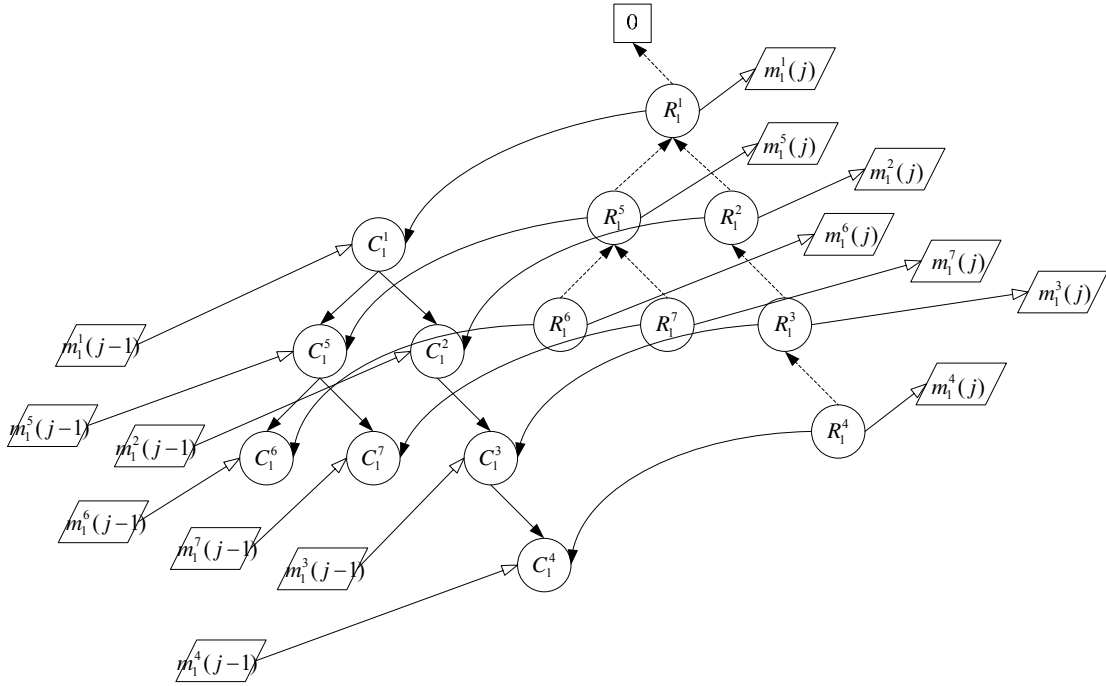
后令每一个电容节点  $C_j^i$  存储它的所有后续电容节点以及它本身的电容之和，这个值

也就是电容  $C_j^i$  对应电感  $L_j^i$  的矩  $m_{L_j^i}(k)$ 。

第二步 : ( BDD 求值 ) 二叉决策图根节点  $R_j^i$  的值由以下递归公式求得

$$val(R_j^i) := R_j^i \times val(R_j^i \rightarrow Then) + val(R_j^i \rightarrow Else) \quad (3.2)$$

其中  $val(Zero) = 0$  ,  $val(R_j^i \rightarrow Then) = cap_j^i$ 。



图表 24 矩计算示意图

Fig. 24 The moment calculator

由电感等效的电压源我们可以用同样的 MDD 进行计算，只需要将 BDD 的电阻节点  $R_j^i$  换成对应的电感  $L_j^i$  即

$$val(L_j^i) := L_j^i \times val(L_j^i \rightarrow Then) + val(L_j^i \rightarrow Else) \quad (3.3)$$

### 3.1.4 耦合的实现

对于存在耦合电容和电感的情况，在矩决策图的构造过程中，我们把相互耦合的电容  $C_j^i$  和  $C_{j1}^i$  用一个权重为  $C_{jj1}^{ii}$  的联结连接起来。相互耦合的电感  $L_j^i$  和  $L_{j1}^i$  用权重为  $K_{jj1}^{ii}$  的联结联系起来。而在  $k$  阶矩的计算过程中，等效电流源必须考虑耦合电容的影响，因此电容节点  $C_j^i$  的值替换为



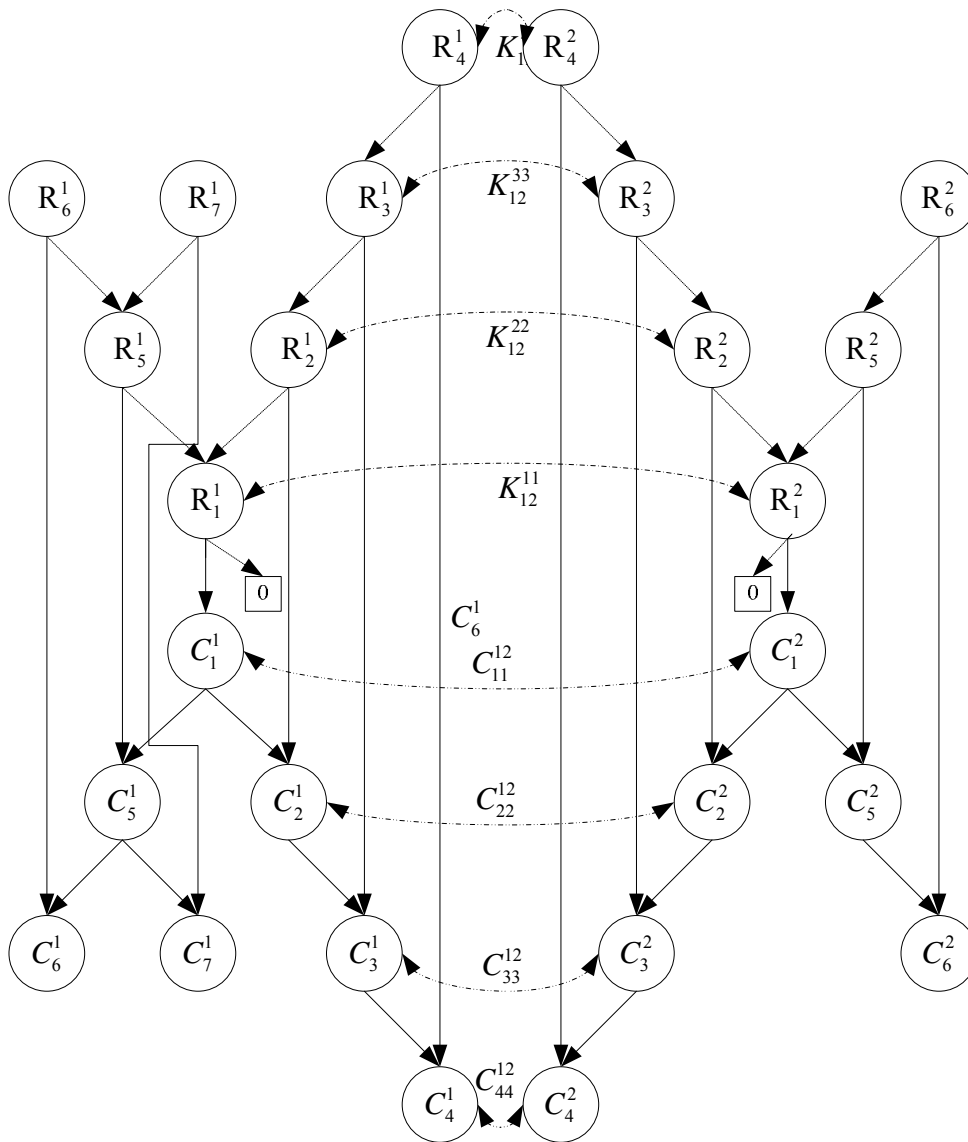
$$cap_j^i = C_j^i m_{C_j^i} (k-1) + \sum_{C_{p p_1}^{i i_1} \in CC_p^i} C_{p p_1}^{i i_1} (m_{C_p^i} (k-1) - m_{C_{p_1}^i} (k-1)) \quad (3.4)$$

同时电感等效的电压源也要考虑由互感引起的浮动电压源，所以递归公式为：

$$val(L_j^i) := L_j^i \times val(L_j^i \rightarrow Then) + val(L_j^i \rightarrow Else) + \sum_{M_{p p_1}^{i i_1} \in M_p^i} val(M_{p p_1}^{i i_1}) \quad (3.5)$$

其中  $val(M_{p p_1}^{i i_1}) := M_{p p_1}^{i i_1} * val(L_{p_1}^{i_1} \rightarrow Then) + val(L_{p_1}^{i_1} \rightarrow Else)$ 。

耦合 RLC 树状电路的矩决策图如图 25 所示。



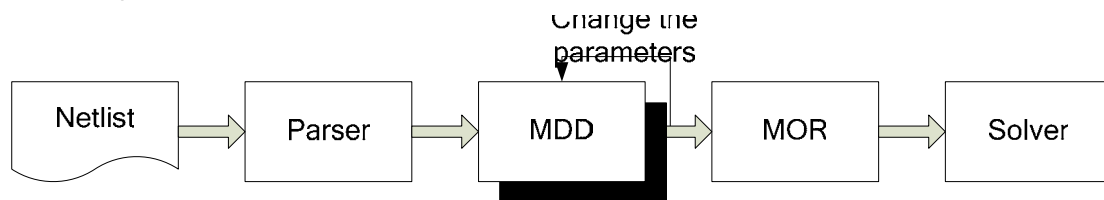
图表 25 耦合 RLC 树状电路的矩决策图

Fig. 25 The moment decision diagram of coupled RLC-tree circuit

## 3.2 基于矩决策图的符号化仿真器

### 3.2.1 符号化仿真器的结构

本文用 C++ 和 MATLAB 共同实现了一个基于 MDD 的耦合树状电路符号化仿真器。仿真器通过解析符合 SPICE 标准语法的网表，构造耦合树状电路的 MDD 结构，通过对 MDD 的遍历求得电路输出节点的各阶矩。然后利用电路的拓扑结构对原电路系统进行模型降阶。最后用 MATLAB 对降阶后的模型进行求解并画出仿真波形。仿真器还可以对相同电路结构不同参数进行快速地多次仿真。这时原系统的 MDD 结构保持不变，只需用不同的参数值对 MDD 进行遍历。



图表 26 符号化仿真器结构

Fig. 26 Structure of symbolic simulator

### 3.2.2 网表的解析

仿真器所使用的网表符合标准的 SPICE 网表的语法。这里我们主要定义 4 种元件，分别是：

电阻：RXXX n1 n2 Rval

电容：CXXX n1 n2 Cval (n2=0 表示对地电容，n2 非 0 表示耦合电容)

电感：LXXX n1 n2 Lval

互感：KXXX LY YY LZ ZZ Kval

其中节点可以为任意数字或字符串。在书写网表时并不要求电路元件按照树的结构输入，在解析网表时程序会根据网表判断系统的结构是否符合树状电路的要求。

耦合树状电路网络可以抽象成为一个无向图，为了高效的实现对网表的解析和对 MDD 的构造，我们采用了图数据结构中的链接表 (Adjacent List) 来存储每一个节点 (Node) 和对应的边 (Edge)。为了快速搜索，我们使用标准模板库 (Standard Template Library, STL) 中的 map 关联容器来存储每一个节点和对应的链接表。Map 关联容器提供一对一 (Key/Value 其中 Key 称为关键字，每个关键字只能在 map 中出现一次，Value 称为该关键字的值) 的数据处理能力，由于这个特性，在处理一对一数据的时候

候可以提供编程的快速通道。

```
map<string, NodeList *> m_AdjList;

typedef struct NodeList {
    string nodeName;
    NodeList *nextNode;
} NodeList;
```

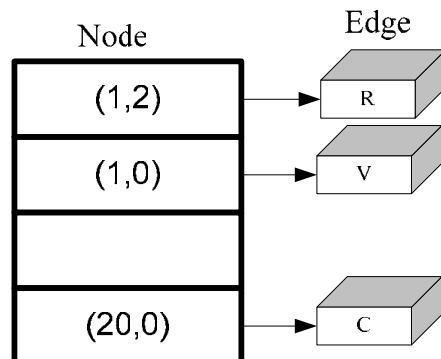
m\_AdjList 的关键字 (Key) 是电路的节点, 关键字的值 (Value) 是与节点相邻的所有节点构成的动态链接表。

我们还使用 map 关联容器来存储两个相邻节点对应的元件边。

```
map<string, Edge *> m_EdgeMap;

typedef struct Edge {
    string edgeName;
    int edgeType;
    double value;
    int index; // use for MOR
    int outPut; // output node
} Edge;
```

m\_EdgeMap 的关键字是两个节点的组合字符串, 关键字的值是两个节点之间的元件边。这里我们定义了元件边的数据结构 Edge。其中包括元件的名称 (edgeName), 元件的类型 (edgeType), 元件的值 (value), 以及这个元件对应节点在电路所有节点中的编号 (index) 和判断这个节点是不是观测点的标志 (outPut)。



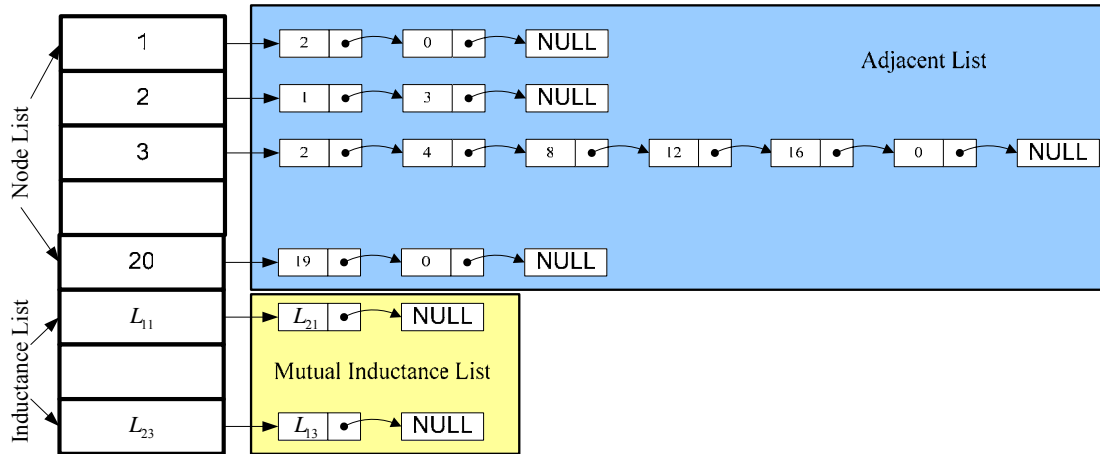
图表 27 m\_EdgeMap 结构示意图

Fig. 27 Diagram of m\_EdgeMap structure

我们还使用 map 关联容器来存储电感元件。

```
map<string, Edge *> m_LEdgeMap;
```

m\_LEdgeMap 的关键字是电感的名称, 关键字的是对应的电感边。



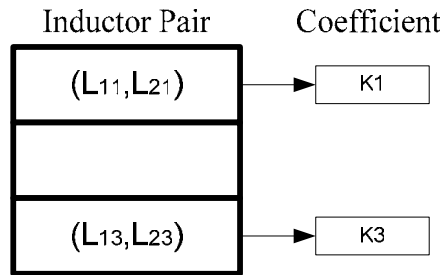
图表 28 m\_AdjList 和 m\_LEdgeMap 结构示意图

Fig. 28 Diagram of m\_AdjList and m\_LEdgeMap structure

我们还使用 map 关联容器来存储相互耦合的电感和对应的互感系数。

```
map<string, double> m_CoefMap;
```

m\_CoefMap 的关键字是相互耦合电感的名称构成的字符串，关键字的值是对应的互感系数。



图表 29 m\_CoefMap 结构示意图

Fig. 29 Diagram of m\_CoefMap structure

通过对网表的一次解析，我们可以上述的所有映射关联容器。同时，由于我们这里规定每一棵树状电路都是单输入的，所以在解析电源的同时，我们可以根据电压源构造一个树状电路的动态链表。并记录对应的根节点名称 (RootNode) 和电源电压值 (voltage)。

```

typedef struct CircuitTree {
    double voltage;
    string RootNode;
    CTree *cTreeRoot;
    int fanoutNum;           // number of the fanout
    int rlcFlag;            // "0" for RC unit, "1" for RLC unit
    int coupledFlag;       // "0" for no coupled, "1" for coupled
} CircuitTree;

typedef struct CircuitTreeList {
    CircuitTree *circuitTree;
    CircuitTreeList *nextCircuitTree;
} CircuitTreeList;

```

### 3.2.3 矩决策图的构造

MDD 的构造过程伴随着对网表文件的检查。检查电路的树状拓扑结构和是否由 RLC 或 RC 单元构成。

首先我们定义电容树和对应电阻多根节点 BDD 的数据结构，电容 CTree 结构中包括对地电容对应电阻的阻值 (rValue)，当前节点的第一个子节点 (firstChild)，与当前节点共有父节点的下一个兄弟 (nextSibling)，与当前电容耦合的电容链表 (coupledCList)，与当前电感耦合的电感链表 (mutualIList) 以及与电容相对应的多根节点 BDD 的电阻节点 (rBDDTree)。

```

typedef struct CTree {
    double rValue;
    CTree *firstChild;
    CTree *nextSibling;
    CoupledCList *coupledCList; // coupled capacitance list
    MutualIList *mutualIList;   // mutual inductor list
    RBDDTree *rBDDTree;
} CTree;

```

电阻多根节点 BDD 的结构中包括在电阻支路上的电感 (lEdge)，对应的对地电容 (cEdge)，BDD 的“Then”边(指向对应的电容树)(leftChild)，BDD 的“Else”边(指向电阻树的父节点)(rightChild) 以及访问标记 (visited)。

```

typedef struct RBDDTree {
    Edge *lEdge;
    Edge *cEdge;
    CTree *leftChild;
    RBDDTree *rightChild;
    int visited;
} RBDDTree;

```

我们分别对树状电路链表 (CircuitTreeList) 中的每一棵树构造 MDD。先从根节点 (RootNode) 开始，搜索根节点的链接表，如果找到一个节点 node1，RootNode 与 node1 对应的边是电阻边 (rEdge)，则搜索 node1 的链接表，如果找到一个节点 node2，node1 和 node2 对应的边是电感边 (lEdge)(此时要保证 node1 的链接表中没有 0 节点，即没有对地电容)，则搜索 node2 的链接表，如果找到 0 节点，则 node2

和 0 对应的边是对地电容边 (cEdge)。此时树状电路的一个 RLC 单元已经确定，可以建立电容树 (CTree) 的根节点和对应电阻 BDD (RBDDTree) 的节点。此时还可以确定耦合电容链表 (coupledCList) 和耦合电感链表 (mutualIList)。对于访问过的节点 node1, node2 和 node3 我们将它们的标记设为 1，以便下次搜索时忽略。我们使用深度优先算法来构造整棵电容树，为了避免递归调用时的栈溢出，我们用三个队列容器 q\_node, q\_tree 和 q\_rbddtree 分别存储当前节点 node3, 电容树节点和电阻 BDD 节点。

### 3.2.4 矩的求解算法

k 阶矩的求解是通过对 MDD 的反向和正向两次遍历求得的。首先对电容树 CTree 进行一次反向深度优先遍历，求得每一个节点（输出观测点）的电容等效电流源之和。作为对应支路的 k 阶电感矩。实现的算法如下：

```

CTreeCalculate_Coupled(tree i, node j, order k)
{
  if( $n_j^i = \phi$ )
    return;
  else {
    CTreeCalculate_Coupled(i,  $n_j^i$ 's first child, k);
    CTreeCalculate_Coupled(i,  $n_j^i$ 's brother, k);
    
$$m_{L_j}^i(k) = C_j^i m_{C_j}^i(k-1) + \sum_{C_n^i \in CC_j^i} C_n^i \left( m_{C_j}^i(k-1) - m_{C_n^i}^i(k-1) \right) + \sum_{\text{all child of } n_j^i} C_l^i m_{C_l}^i(k-1)$$

  }
}

```

然后正向广度优先遍历电容树 CTree，对于每一个电容节点所对应的电阻多根节点 BDD 树(RBDDTree)上的电阻根节点，利用式 3.2 到式 3.5 求解，得到对应电容节点的 k 阶电容矩。实现的算法如下：

```

AllNodeNMC_Coupled(tree i, node j, order k)
{
  if( $n_j^i = \phi$ )
    return;
  else {
    if( $R_j^i \rightarrow$  "Then"){
       $m_{C_j^i}(k) = R_j^i m_{L_j^i}(k) - L_j^i m_{L_j^i}(k) - \sum_{M_n^i \in ML_j^i} M_n^i m_{L_n^i}(k)$ 
    }
    if( $R_j^i \rightarrow$  "Else"){
       $R_l^i = R_j^i \rightarrow$  "Else"
       $m_{C_j^i}(k) += m_{L_j^i}(k)$ 
    }
    AllNodeNMC_Coupled(i,  $n_j^i$ 's brother, k);
    AllNodeNMC_Coupled(i,  $n_j^i$ 's first child, k);
  }
}

```

对于含有 N 棵耦合 RLC 树状电路的网络，为了求阶电路的 k 阶矩，我们必须分别求解电路每一输出接点的 0 到 k-1 阶矩（这里的矩包括电容矩和电压矩）。并将得到的结果存储起来，为模型降阶所用。实现的算法如下：

```

NMC_Coupled()
{
  for each order j from 0 to k {
    for each  $T^i \in T$  do {
      CTreeCalculate_Coupled(i, Root(i), j);
      AllNodeNMC_Coupled(i, Root(i), j);
    }
  }
}

```

### 3.3 本章小结

本章在第 2 章的基础上，提出了基于矩决策图的矩符号化计算方法，并将其推广到分析耦合 RLC 树状电路。这个算法避免了 RICE<sup>[24]</sup>等算法复杂的路径追踪过程，将电路用与其等效的矩决策图来存储，即符号化地表示了矩求解的数值递归过程。并根据这一算法构造了一个用于分析耦合 RLC 树状电路信号完整性的矩符号化仿真器。

## 4 矩符号化算法在串扰分析中的应用

互连之间的串扰(Crosstalk)是指两相邻互连之间的电磁耦合作用所诱生出来的干扰噪声,它会影响到信号在互连上传输的逻辑特性和时序特性。在深亚微米 VLSI 互连设计中必须充分考虑串扰效应的影响。本章首先对第 3 章构造的矩符号化互连线仿真器进行测试,验证它的优越性。然后利用它对分布参数模型的耦合互连线的串扰进行分析。

### 4.1 矩符号化仿真器的性能测试

首先我们对第 3 章构造的基于矩决策图的符号化仿真器进行测试。由于我们使用 MATLAB 实现降阶模型的求解,所以在这里我们并不测试对降阶模型的求解时间。我们只对网表的解析、矩决策图的构造,矩的求解和模型降阶过程进行时间测试。这里我们的测试电路是由脚本自动生成的树状电路,可以设定每一个节点的扇出个数范围以及电路的元件(电阻、电感和电容)的值,同时可以设定耦合电容和互感。

首先,我们将扇出数定为 10,电路元件值设为: $r = 1m\Omega, l = 1nH, c = 1pF$ ,分别对不同的 RLC 个数的树状电路进行测试,测试结果如表 2 所示。

表格 2 RLC 树状电路的测试结果

Table 2 Test results of RLC-tree circuits with 10 fanouts

No. of RLC	Time of Netlist Parsing (s)	Time of MDD Conformation (s)	Time of Moment Evaluating (s)	Time of Model Order Reduction (s)
10	0	0	0.015	0
100	0.047	0.016	0.015	0
1000	0.312	0.141	0.015	0
10000	3.531	1.719	0.11	0.046
100000	132.594	19.828	1.344	0.5

其次,我们将扇出数定为 10,电路元件值设为: $r = 1m\Omega, c = 1pF$ ,分别对不同的 RC 个数的树状电路进行测试,测试结果如表 3 所示。



表格 3 RC 树状电路的测试结果

Table 3 Test results of RC-tree circuits with 10 fanouts

No. of RC	Time of Netlist Parsing (s)	Time of MDD Conformation (s)	Time of Moment Evaluating (s)	Time of Model Order Reduction (s)
10	0.015	0	0	0
100	0.047	0.015	0	0
1000	0.187	0.11	0.015	0
10000	2.328	1.172	0.11	0.031
100000	108.454	13.312	1.283	0.422

然后，我们将扇出数定为 10，电路元件值设为： $r = 1m\Omega, l = 1nH, c = 1pF, cc = 0.1pF, k = 0.9$  的两棵耦合树状电路的不同的 RLC 个数进行测试，测试结果如表 4 所示。

表格 4 耦合 RLC 树状电路的测试结果

Table 4 Test results of coupled RLC-tree circuits

No. of RLC in ladder	Time of Netlist Parsing (s)	Time of MDD Conformation (s)	Time of Moment Evaluating (s)	Time of Model Order Reduction (s)
10	0.016	0	0	0
100	0.094	0.047	0	0
1000	0.86	0.484	0.031	0.015
10000	17.657	5.437	0.328	0.157
100000	2070.42	60.781	3.328	1.609

以上测试我们求的是电路的 4 阶矩，也就是降阶后模型的阶数为 4。由测试结果可以看出，仿真器的运行过程中，网表的解析时间占了大部分，且随着节点数指数增长。而相比之下，矩决策图的构造，矩的求解和模型降阶的时间很短，且随着节点数线性增长。这一点就充分体现了矩的符号化计算的优越性。在对同一电路进行不同元件参数的多次分析（如敏感性（sensitivity）分析）时，我们只需对描述电路的网表进行一次解析，并构造一次矩决策图，就可以对不同参数情况下的电路的矩进行求

解，这样可以大大提高多次运算的速度。同时和 RICE<sup>[24]</sup>等树枝递归算法相比<sup>[25, 28]</sup>，符号化据计算方法用符号的形式将电路的低阶矩存储起来，在计算高阶矩的时候，可以直接利用上一次的计算结果。也就是说，在计算  $k$  阶矩时，只要对  $k-1$  阶矩的决策图进行正反两次遍历，不需要从 0 阶矩开始计算。同时，我们发现模型降阶的时间同样是随着电路节点数线性增长的，这里是因为降阶过程避免了直接的矩阵运算，而是通过对 MDD 的一次遍历得到的。

对于相同节点数的树状电路，我们通过测试可以发现，随着每一个节点扇出数的增加，矩的求解时间也会增加，因为扇出的增加使树状电路的拓扑结构更加复杂，增加了遍历 MDD 的时间。这里我们对含有 20000 个 RLC 的树状电路按不同的最大扇出数进行了测试，测试结果如表 5 所示。（这里求解的是电路的 4 阶矩，电路元件参数为  $r = 1m\Omega, l = 1nH, c = 1pF$ ）

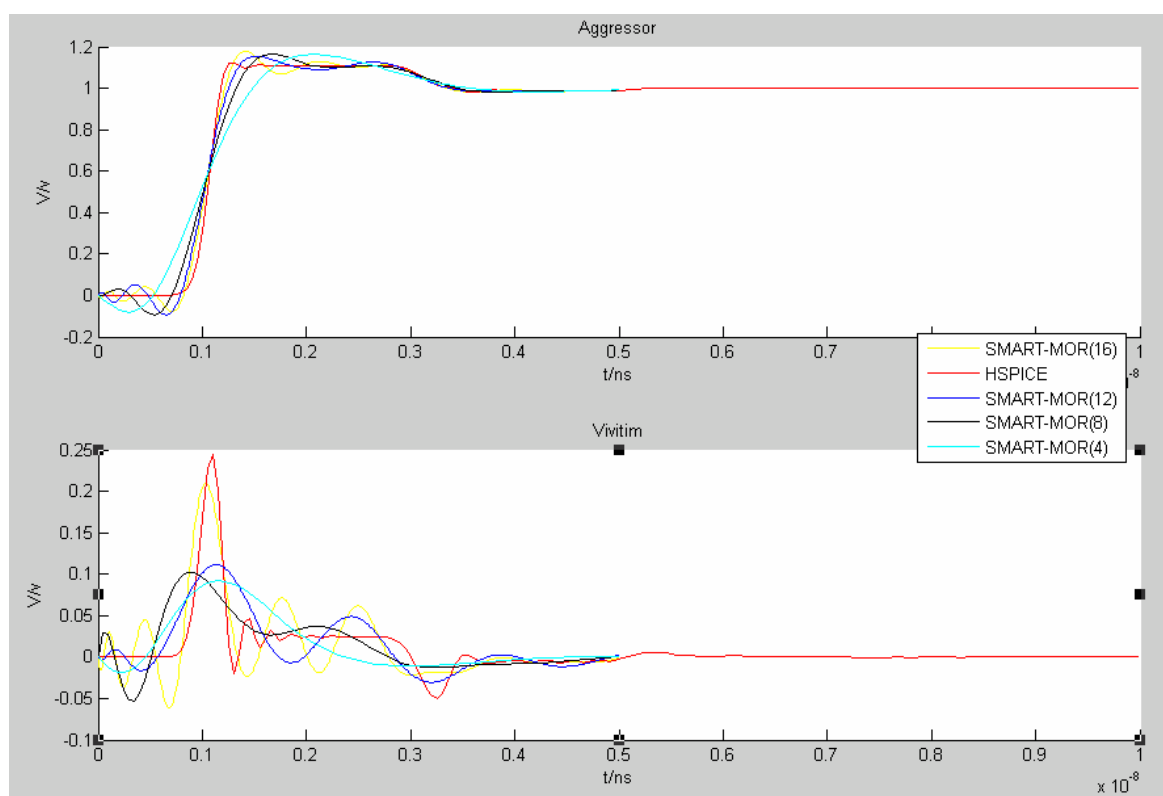
表格 5 不同最大扇出的 RLC 树状电路的测试结果

Table 5 Test results of RLC-tree circuits with different maximum fanouts

Max No.of Fanouts	Time of Netlist Parsing (s)	Time of MDD Conformation (s)	Time of Moment Evaluating (s)	Time of Model Order Reduction (s)
50	32.563	3.578	<b>0.25</b>	0.078
100	32.531	3.609	<b>0.235</b>	0.093
500	32.625	3.562	<b>0.641</b>	0.078
1000	32.625	3.563	<b>2.343</b>	0.079
3000	32.61	3.562	<b>5.453</b>	0.078
5000	<b>34.031</b>	3.578	<b>10.984</b>	0.078

然后，我们用不同的阶数来对原来的模型进行降阶。这里我们的测试电路是两根平行的 RLC 互连线，其中一根接入 1V 的跳变电压，另一根源端接地。我们观察两根互连线远端的输出电压波形。这里我们设电路元件参数为  $r = 5.3571m\Omega$ ， $l = 0.6138nH$ ， $c = 0.1420pF$  电源内阻  $R_s = 50\Omega$ ，负载电容为  $C_L = 1pF$ 。这里每根互连线是由 100 段 RLC 组成的。

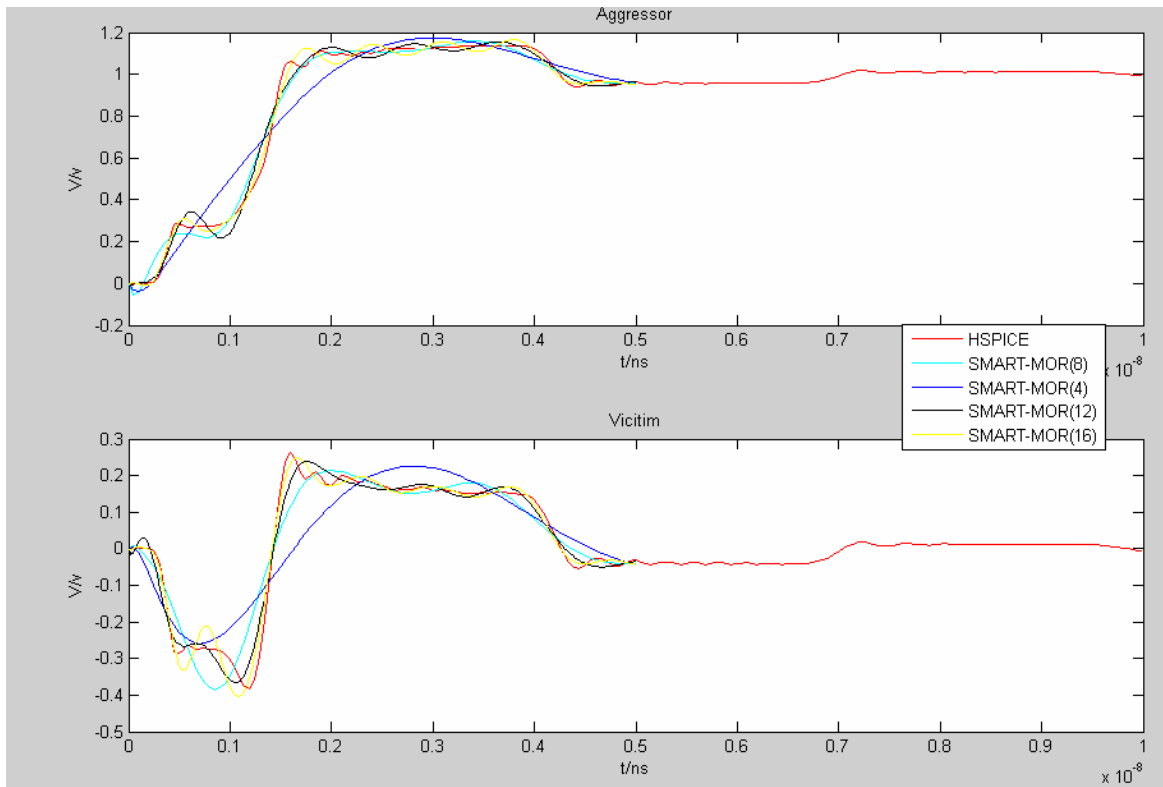
首先，我们只考虑耦合电容的影响，这里我们设耦合电容为  $cc = 0.0155pF$ 。我们分别对不同阶数降阶的模型进行仿真，结果如图 30 所示。



图表 30 平行耦合（电容）互连线降阶模型输出波形

Fig. 30 Accuracy of reduced order models of capacitive coupled interconnects compared to HSPICE

然后我们考虑互感的影响，这里我们设互感系数为 0.9。同样我们分别对不同阶数降阶的模型进行仿真，结果如图 31 所示。



图表 31 平行耦合（电感）互连线降阶模型输出波形

Fig. 31 Accuracy of reduced order models of inductive coupled interconnects compared to HSPICE

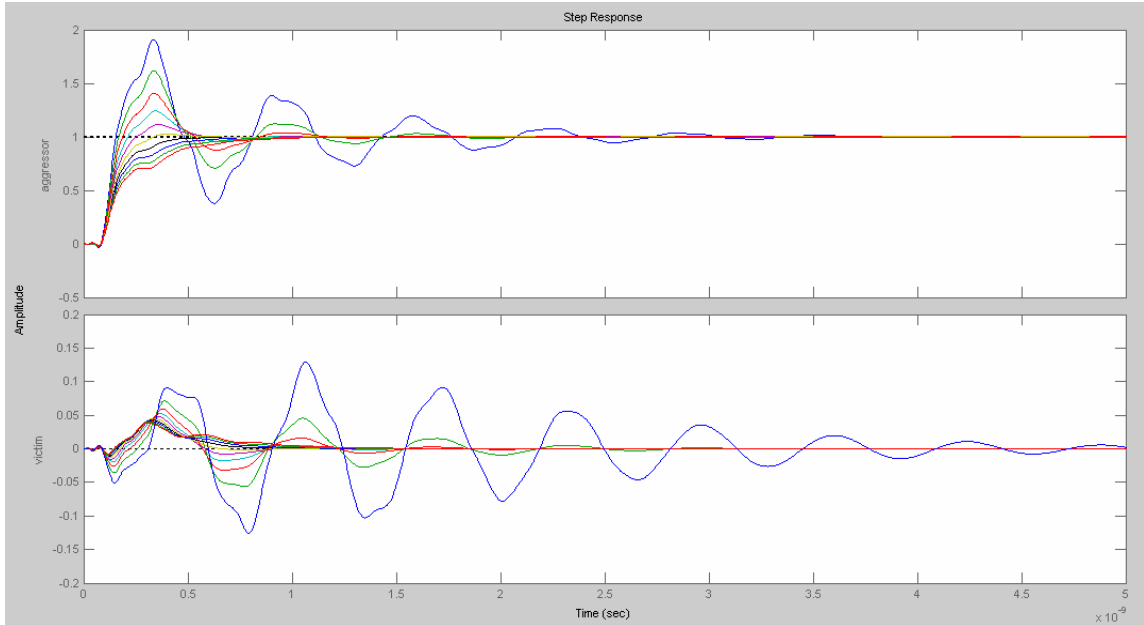
由图30和图31可以看出，对与RLC互连电路而言，如果考虑了耦合效应，较低的阶数的降阶模型已经不能对它们的输出特性（包括传输延迟和串扰）进行很好的估计和仿真，必须提高降阶模型的阶数。然而这样，在提高仿真精度的同时，也增加了计算的复杂度和时间。

#### 4.2 基于矩符号化仿真器的串扰分析

集总参数系统是实际情况的一种理想化近似。实际的情况是各种参数分布于电路所在空间的各处，当这种分散性造成的信号延迟时间与信号本身的变化时间相比已不能忽略的时候，就不能再用理想化的模型来描述网络。必须要用互连线的分布参数模型（即传输线模型）来分析。文献<sup>[25]</sup>提出了分布参数模型的电容耦合RC互连树的串扰估计方法，文献<sup>[28, 29]</sup>提出了分布参数模型的电容电感耦合RLC互连树的串扰估计。然而以上两种方法对互连树节点矩的计算是基于数值递归算法的。这里，我们使用基于矩决策图的互连线符号化仿真器来分析不同的输入电容和分布电路参数

对耦合互连线远端串扰的影响。

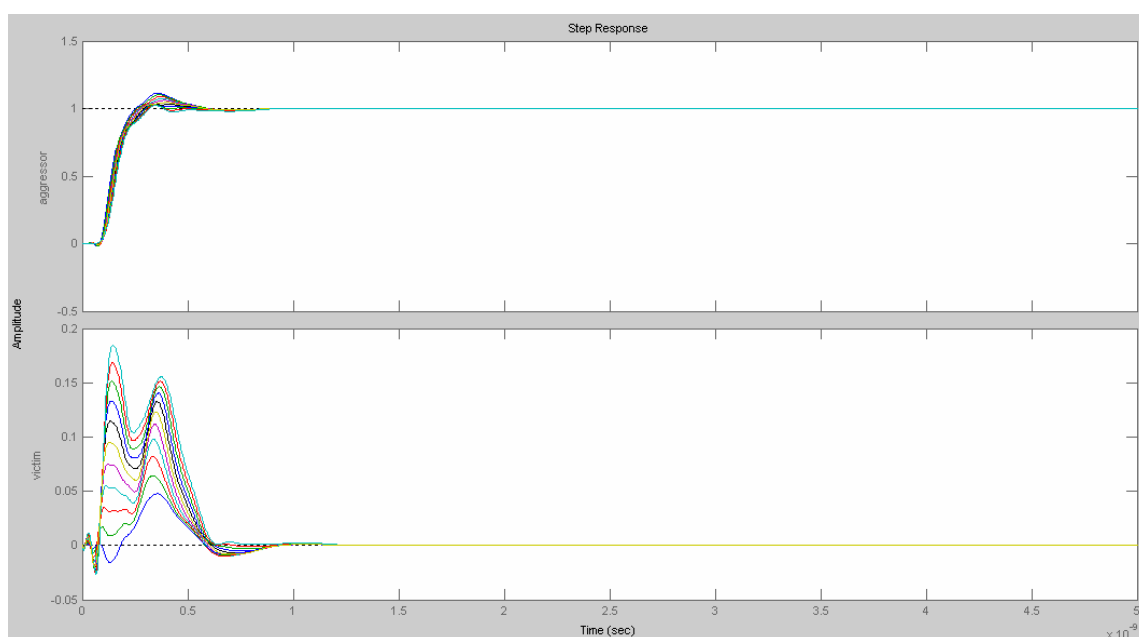
由于据决策图的结构只与电路结构相关，与电路参数无关，所以在分析变化参数对耦合互连线串扰影响时效率很高。这里我们分析两根平行耦合RLC分布参数互连线之间的串扰，观察受害者远端的串扰随驱动电源内阻、互感系数以及耦合电容变化的影响。这里每一根互连线由100个RLC单元组成，它的单位长度参数分别是  $r = 5.3571m\Omega$ ， $l = 0.6138nH$ ， $c = 0.1420pF$ 。



图表 32 串扰随驱动电源内阻的变化

Fig. 32 Variational waveforms with respect to the driving resistance

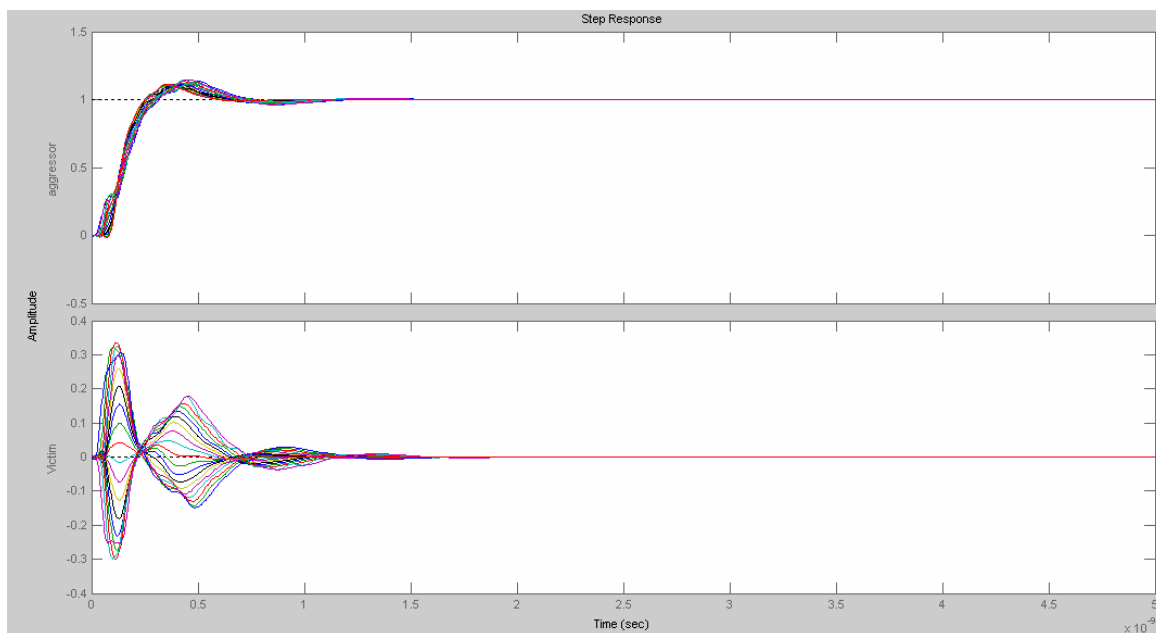
图32是在互感系数为  $K = 0.1$ ，负载电容为  $C_L = 1pF$  时，侵略者驱动电源内阻从  $10\Omega$  到  $100\Omega$  变化，平行耦合互连线远端阶跃响应波形和串扰波形，从图中可以看出，以高驱动电源的内阻可以改善耦合互连线的信号完整性。



图表 33 串扰随耦合电容的变化

Fig. 33 Waveform resulting from variational capacitive coupling

图33是在驱动电源内阻为  $R_S = 50\Omega$ ，互感系数为  $K = 0.1$ ，负载电容为  $C_L = 1pF$  时，分布耦合电容从  $0.0155pF$  变化到  $0.1155pF$  时，平行耦合互连线远端阶跃响应波形和串扰波形，从图中可以看出，随着耦合电容的增加，受害者远端的串扰明显增加，而侵略者的传输延迟没有明显变化。



图表 34 串扰随互感的变化

Fig. 34 Waveforms resulting from variational inductive coupling

图34是在驱动电源内阻为  $R_s = 50\Omega$ ，负载电容为  $C_L = 1pF$  时，分布耦合电容参数为  $cc = 0.0155pF$ ，分布互感系数从-0.9变化到0.9时，平行耦合互连线远端阶跃响应波形和串扰波形，从图中可以看出，随着互感系数的增加，受害者远端的串扰明显增加，而侵略者的传输延迟没有明显变化。

### 4.3 本章小结

本章首先介绍了基于集总参数模型的耦合互连线的串扰估计的一般方法。这些方法存在正精度不足的缺点。然后利用第3章构造的矩符号化互连线仿真器，对分布参数模型的耦合互连线的串扰进行分析。这里充分利用了矩符号化互连线仿真器的特点，在读入一次网表和构造一次矩决策图的情况下，高效地对不同电路参数的电路进行了仿真，其仿真结果精度高，能够对电路设计提供参考。

## 5 总结

随着集成电路复杂度的提高，其分析和设计技术日渐成为人们关注的焦点。小小的芯片上是由成千上万、甚至是上百万个基本器件构成的。器件组成芯片、芯片组成系统都需要互连。VLSI 芯片上互连尺寸的缩小，芯片面积的增大，以及工作速度的提高，使得集成电路的互连问题（如信号延迟、振荡、串扰等）越来越重要。

本文研究工作涉及集成电路新型 EDA 工具的开发领域。本文主要目的是对耦合 RLC 树状互连的模型和模拟方法作进一步的探索，寻求高精度、高效率、具有广泛适用性的互连线仿真算法。对新一代集成电路系统分析和设计，特别是对统计静态时序分析、信号完整性驱动的布局布线由非常重要的意义。

本文以耦合 RLC 树状互连为研究对象，提出了一种符号化的模型降阶算法。算法设计时考虑了精度和速度两个方面。精确的互连线模型在一定程度上可以提高大规模集成电路设计和验证的效率。随着集成电路尺寸的减小和规模的增大，集成电路工作频率的提高和低电阻材料的应用，互连线的寄生电感和互感效应越来越明显，互连线的模型必须考虑到这些效应。互连不断呈现出一些新特点，随之 RLC 树状互连的模型和仿真技术也需要进一步地完善。

本文提出了耦合 RLC 树状互连矩的符号化计算方法，并构造了基于此算法的互连线符号化仿真器。主要贡献和研究成果如下：

本文以矩匹配的模型降阶算法为切入点，通过对单棵 RLC 树状电路和耦合 RLC 树状电路的分析，从原理上得出了耦合 RLC 树状电路矩的求解公式，并受到矩阵计算的启发，结合电路的拓扑结构，提出了互感和互容去耦合的等效电路。同时利用矩构造投影矩阵，对原电路模型进行降阶，降阶过程利用树状电路的特殊结构实现了简化。在此基础上，本文提出了基于矩决策图的矩符号化计算方法，并将其推广到分析耦合 RLC 树状电路。这个算法避免了数值递归算法复杂的路径追踪过程，将电路用与其等效的矩决策图来存储，即符号化地表示了矩求解的数值递归过程。同时，本文还根据这一算法构造了一个用于分析耦合 RLC 树状电路信号完整性的符号化仿真器，通过对不同电路的测试，论证了算法的可行性和有效性。最后，本文用这个仿真器高效地研究了电路参数对平行耦合互连线串扰的影响，希望为集成电路的设计或布局布线提供参考。

当前，互连效应已经有了比较系统的模型和分析方法，模拟研究也有了很大的进



展，但是随着集成电路技术的进一步发展，还需将这些技术兼容于现有的计算机辅助设计（CAD）或设计自动化（EDA）系统中，已解决实际的设计问题。在这一方面，还有大量的实际工作需要充实和完善。在本文研究工作的基础上，以下几个方面的问题需要作进一步的研究和探讨：

提高符号化互连线仿真器网表的读入和解析时间，结合现有的 EDA 平台对仿真器进行实用化软件设计，以便于进一步得到应用。

对耦合引起的串扰提出定量的估计公式，对信号完整性驱动的布局布线提供指导。

集合互连线分布参数模型，对含有传输线段的树状互连网路进行仿真。

## 参 考 文 献

- [1] L. Kavan, J. Rathousky, M. Gratzel, V. Shklover, and A. Zukal, "Mesoporous thin film TiO<sub>2</sub> electrodes," *Microporous and Mesoporous Materials*, vol. 44, pp. 653-659, 2001.
- [2] L. T. Pillage and R. A. Rohrer, "Asymptotic waveform evaluation for timing analysis," *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, vol. 9, pp. 352-366, 1990.
- [3] C. Fung-Yuel, "Transient Analysis of Lossless Coupled Transmission Lines in a Nonhomogeneous Dielectric Medium," *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 18, pp. 616-626, 1970.
- [4] C. H. Yoon, R. Vittal, J. Lee, W.-S. Chae, and K.-J. Kim, "Enhanced performance of a dye-sensitized solar cell with an electrodeposited-platinum counter electrode," *Electrochimica Acta*, vol. 53, pp. 2890-2896, 2008.
- [5] E. Yungseon, S. Jongin, and W. R. Eisenstadt, "A traveling-wave-based waveform approximation technique for the timing verification of single transmission lines," *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, vol. 21, pp. 723-730, 2002.
- [6] E. Yungseon, S. Seongkyun, W. R. Eisenstadt, and S. Jongin, "Generalized traveling-wave-based waveform approximation technique for the efficient signal integrity verification of multicoupled transmission line system," *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, vol. 21, pp. 1489-1497, 2002.
- [7] L. Yi-Chang, C. Mustafa, Y. Tak, and T. P. Lawrence, "Min/max on-chip inductance models and delay metrics," in *Proceedings of the 38th conference on Design automation*. Las Vegas, Nevada, United States: ACM, 2001.
- [8] G. Servel and D. Deschacht, "On-chip crosstalk evaluation between adjacent interconnections," presented at Electronics, Circuits and Systems, 2000. ICECS 2000. The 7th IEEE International Conference on, 2000.
- [9] J. Gong, D. Z. Pan, and P. V. Srinivas, "Improved crosstalk modeling for noise constrained interconnect optimization," presented at Design Automation Conference, 2001. Proceedings of the ASP-DAC 2001. Asia and South Pacific, 2001.
- [10] M. R. Becer, D. Blaauw, V. Zolotov, R. Panda, and I. N. Hajj, "Analysis of noise avoidance techniques in DSM interconnects using a complete crosstalk noise model," presented at Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition, 2002. Proceedings, 2002.
- [11] P. Feldmann and R. W. Freund, "Reduced-order modeling of large linear subcircuits via a block Lanczos algorithm," in *Proceedings of the 32nd ACM/IEEE conference on Design automation*. San Francisco, California, United States: ACM, 1995.
- [12] P. Feldmann and R. W. Freund, "Efficient linear circuit analysis by Pade approximation via the Lanczos process," *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE*

*Transactions on*, vol. 14, pp. 639-649, 1995.

[13] L. M. Silveira, K. Mattan, E. Ibrahim, and W. Jacob, "A coordinate-transformed Arnoldi algorithm for generating guaranteed stable reduced-order models of RLC circuits," in *Proceedings of the 1996 IEEE/ACM international conference on Computer-aided design*. San Jose, California, United States: IEEE Computer Society, 1996.

[14] J. K. Kevin, L. W. Ivan, and T. Y. Andrew, "Stable and efficient reduction of substrate model networks using congruence transforms," in *Proceedings of the 1995 IEEE/ACM international conference on Computer-aided design*. San Jose, California, United States: IEEE Computer Society, 1995.

[15] A. Odabasioglu, M. Celik, and L. T. Pileggi, "PRIMA: passive reduced-order interconnect macromodeling algorithm," presented at Computer-Aided Design, 1997. Digest of Technical Papers., 1997 IEEE/ACM International Conference on, 1997.

[16] R. W. Freund, "Krylov-subspace methods for reduced-order modeling in circuit simulation," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 123, pp. 395-421, 2000.

[17] R. W. Freund and P. Feldmann, "Reduced-order modeling of large passive linear circuits by means of the SyPVL algorithm," presented at Computer-Aided Design, 1996. ICCAD-96. Digest of Technical Papers., 1996 IEEE/ACM International Conference on, 1996.

[18] R. W. Freund and P. Feldmann, "The SyMPVL algorithm and its applications to interconnect simulation," presented at Simulation of Semiconductor Processes and Devices, 1997. SISPAD '97., 1997 International Conference on, 1997.

[19] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their  $L^\infty$ -error bounds," *Int J. Control*, vol. 39, pp. 1115-1193, 1984.

[20] L. Jing-Rebecca, F. Wang, and J. White, "An efficient Lyapunov equation-based approach for generating reduced-order models of interconnect," presented at Design Automation Conference, 1999. Proceedings. 36th, 1999.

[21] L. Ying, T. P. Lawrence, and J. S. Andrzej, "Model order-reduction of RC(L) interconnect including variational analysis," in *Proceedings of the 36th ACM/IEEE conference on Design automation*. New Orleans, Louisiana, United States: ACM, 1999.

[22] K. J. Kerns and A. T. Yang, "Stable and efficient reduction of large, multiport RC networks by pole analysis via congruence transformations," presented at Design Automation Conference Proceedings 1996, 33rd, 1996.

[23] J. D. Ma and R. A. Rutenbar, "Fast interval-valued statistical modeling of interconnect and effective capacitance," *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, vol. 25, pp. 710-724, 2006.

[24] C. L. Ratzlaff and L. T. Pillage, "RICE: rapid interconnect circuit evaluation using AWE," *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, vol. 13, pp. 763-776, 1994.

[25] Y. Qingjian and E. S. Kuh, "Moment computation of lumped and distributed coupled RC trees with application to delay and crosstalk estimation," *Proceedings of the IEEE*, vol. 89, pp.

772-788, 2001.

[26] Y. Qingjian, E. S. Kuh, and X. Tianxiong, "Moment models of general transmission lines with application to interconnect analysis and optimization," *Very Large Scale Integration (VLSI) Systems, IEEE Transactions on*, vol. 4, pp. 477-494, 1996.

[27] Y. Qingjian, J. M. Wang, and E. S. Kuh, "Passive model order reduction algorithm based on Chebyshev expansion of impulse response of interconnect networks," presented at Design Automation Conference, 2000. Proceedings 2000. 37th, 2000.

[28] T. LEE HERNG-JER(Chang Gung Univ., T. CHU CHIA-CHI(Chang Gung Univ., T. LAI MING-HONG(Chang Gung Univ., and T. FENG WU-SHIUNG(Chang Gung Univ., "Moment Computations of Distributed Coupled RLC Interconnects with Applications to Estimating Crosstalk Noise," *IEICE Trans Electron (Inst Electron Inf Commun Eng)*, vol. E88-C, pp. 1186-1195, 2005.

[29] L. Heng-Jer, C. Chia-Chi, and F. Wu-Shiung, "Moment computations of nonuniform distributed coupled RLC trees with applications to estimating crosstalk noise," presented at Quality Electronic Design, 2004. Proceedings. 5th International Symposium on, 2004.

[30] Q. Yu, J. M. L. Wang, and E. S. Kuh, "Passive multipoint moment matching model order reduction algorithm on multipoint distributed interconnect networks," *Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications, IEEE Transactions on*, vol. 46, pp. 140-160, 1999.

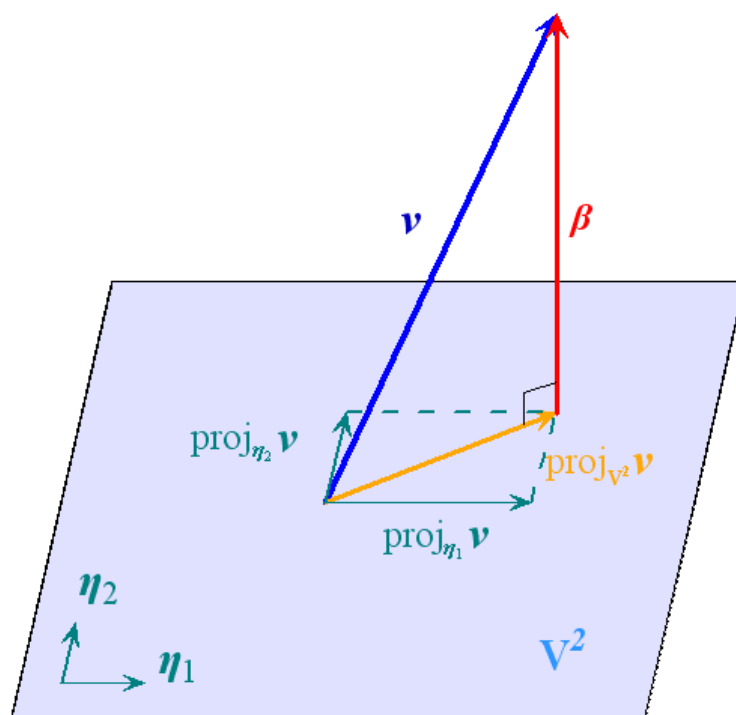
[31] G. Shi, "A Symbolic Moment Calculator for RLC Tree Circuits with Application," *submitted to ISCAS*, 2009

## 附录一 Gram-Schmidt 正交化

线性代数理论指出，内积空间上的一组向量能够张成一个子空间。Gram-Schmidt 正交化提供一种方法，能够通过这组向量求出这一子空间上的一组正交基，并进一步求出对应的标准正交基。在数值计算中，Gram-Schmidt 正交化是数值不稳定的，计算中累计的舍入误差会使最终结果的正交性变得很差。因此在实际应用中通常使用 Householder 变换或 Givens 旋转进行正交化。

我们定义  $V^n$  为  $n$  的内积空间。 $v \in V^n$  为  $V^n$  中的元素，可以是向量、函数等等。 $\langle v_1, v_2 \rangle$  为  $v_1$  和  $v_2$  的内积。 $\text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  为  $v_1, v_2, \dots, v_n$  张成的子空间。

$\text{proj}_v u = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$  为  $u$  在  $v$  上的投影。



Gram-Schmidt 正交化的基本思想，是利用投影原理在已有的正交基的基础上构造一个新的正交基。设  $v \in V^n$ 。 $V^k$  是  $V^n$  上的  $k$  维子空间，其标准正交基为  $\{\eta_1, \dots, \eta_k\}$ ，且  $v$  不在  $V^k$  上。由投影原理知， $v$  与其在  $V^k$  上的投影  $\text{proj}_{V^k} v$  之差

$$\beta = v - \sum_{i=1}^k \text{proj}_v \eta_i = v - \sum_{i=1}^k \langle v, \eta_i \rangle \eta_i$$

是正交于子空间  $\mathbf{V}^n$ ，亦即  $\beta$  正交于  $\mathbf{V}^n$  的正交基  $\eta_i$ 。因此只要将  $\beta$  单位化，即

$$\eta_{k+1} = \frac{\beta}{\|\beta\|} = \frac{\beta}{\sqrt{\langle \beta, \beta \rangle}}$$

那么  $\{\eta_1, \dots, \eta_{k+1}\}$  就是  $\mathbf{V}^k$  在  $v$  上扩展的子空间  $\text{span}\{v, \eta_1, \dots, \eta_k\}$  的标准正交基。

根据上述分析，对于向量组  $\{v_1, \dots, v_m\}$  张成的空间  $\mathbf{V}^n$ ，只要从其中一个向量（不妨设为  $v_1$ ）所张成的一维子空间  $\text{span}\{v_1\}$  开始（注意到  $\{v_1\}$  就是  $\text{span}\{v_1\}$  的正交基），重复上述扩展构造正交基的过程，就能够得到  $\mathbf{V}^n$  的一组正交基。这就是 Gram-Schmidt 正交化。

首先需要确定扩展正交基的顺序，不妨设为  $\{v_1, \dots, v_n\}$ 。Gram-Schmidt 正交化的过程如下：

$$\begin{aligned} \beta_1 &= v_1, & \eta_1 &= \frac{\beta_1}{\|\beta_1\|} \\ \beta_2 &= v_2 - \langle v_2, \eta_1 \rangle \eta_1, & \eta_2 &= \frac{\beta_2}{\|\beta_2\|} \\ \beta_3 &= v_3 - \langle v_3, \eta_1 \rangle \eta_1 - \langle v_3, \eta_2 \rangle \eta_2, & \eta_3 &= \frac{\beta_3}{\|\beta_3\|} \\ &\vdots & & \\ \beta_n &= v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, \eta_i \rangle \eta_i, & \eta_n &= \frac{\beta_n}{\|\beta_n\|} \end{aligned}$$

这样就得到  $\text{span}\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$  上的一组正交基  $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$  和相应的标准正交基  $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ 。

## 致 谢

首先感谢施国勇教授，本论文是在施老师的直接指导下完成的。施国勇教授的悉心指导与教诲，对研究热点的把握，以及在我研究过程中提供的建议和对研究方向的指引是我的研究工作顺利完成的基础。施老师治学严谨，目光敏锐，平易近人，对科研工作有着无限的热情。对我触动最大的施老师的敬业精神和高度的责任感。施老师的精神深深地感染了我，是我应该学习的榜样！

硕士的两年半是我学习科研工作的起步阶段，正是施老师给予的指导使我具备了初步的科研技能、对科研工作有了初步的认识。硕士的两年半也是我处事为人的形成阶段，施老师的言行举止给了我潜移默化的影响，使我获益匪浅。在论文即将完成之际，特别对施老师表达我的衷心感谢！

同时要感谢郝志刚博士的无私交流和鼓励，郝志刚博士在模型降阶和信号完整性等领域的研究给我的研究工作带了许多启发和帮助。与他的每一次交流都是具有建设性的，不仅拓宽了我的思路，还坚定了我的信念。

感谢与我同一研究方向的余雪红、孟晓璇、黄世杰、徐迪和谢边村等同学。在攻读硕士的两年半时间里，我们在实验室里朝夕相处，共同进步。徐迪和谢边村的研究给我带来了许多启示，是我理论的切入点。黄世杰和余雪红的研究丰富了我理论的应用，并给我的研究提出了许多宝贵建议。

最后，我要深深地感谢我的家人，我能获得更多的知识源于他们良好的启蒙，我能获得更好的品质源于他们做出了优秀的榜样，我能无忧无虑的学习知识源于他们无私的支持。

## 攻读硕士学位期间已发表或录用的论文

1. 刘安. 树状电路信号完整性符号化分析方法与应用. 现代电子技术 2009, 14