

上海交通大学硕士学位论文

# 多互连系统参数化快速分析方法研究

姓 名： 郝志刚

导 师： 施国勇

指导老师： 施国勇

学 校： 上海交通大学

院 系： 微电子学院

专 业： 电路与系统

上海交通大学微电子学院

2007 年 12 月

**A Dissertation Submitted to Shanghai Jiao Tong University for  
Master Degree of Science**

**Research on the High-speed Parametric Multi-port  
Interconnect Analysis Techniques**

**Author:** HAO, Zhigang

**Specialty:** Circuit and Systems

**Advisor I :** Prof. SHI, Guoyong

**Advisor II :** Prof. SHI, Guoyong

School of Microelectronics  
Shanghai Jiao Tong University  
Shanghai, P.R.China

December, 2007

# 上海交通大学

## 学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：

日期： 年 月 日

# 上海交通大学

## 学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权上海交通大学可以将本学位论文的全部或部分内 容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

保密，在\_\_\_\_年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

不保密。

(请在以上方框内打“√”)

学位论文作者签名：

指导教师签名：

日期： 年 月 日

日期： 年 月 日

## 多互连系统参数化快速分析方法研究

### 摘 要

本文首先介绍了模型降阶算法的基本思想及在深亚微米工艺下所碰到的信号完整性问题。接下来对模型降阶领域的经典算法及该领域的最新算法进行了阐述与比较，并且介绍了在深亚微米工艺的背景下考虑参数变化情况模型降阶算法发展。本文提出了一种基于可观测标准型的可分析参数变化情况下多输入多输出系统的模型降阶算法，并且对于该算法想法的产生，及数学推导过程作了进一步的说明。该算法具有形式简洁，匹配精度高的特点。在实验部分，我们选取了存在耦合的互连线模型及 RLC 传输线模型验证了本文提出算法在频域上和时域上与原模型的拟合精确度，说明了本算法能够用来解决信号完整性问题，有很好的应用前景。

**关键词：** 参数变化，模型降阶，多互连，信号完整性

# RESEARCH ON THE HIGH-SPEED PARAMETRIC MULTI-PORT INTERCONNECT ANALYSIS TECHNIQUES

## ABSTRACT

This paper first introduces the principles of model order reduction techniques and emphasis the signal integrity problems facing us in the deep submicron IC design. Several classical and newly introduced algorithms are explained in detail afterwards. Also the hot topic on parametric model order reduction in this research area is introduced. In this paper, a new algorithm based on observability canonical form which could be used to deal with parametric interconnect analysis is proposed. It has a simple structure and is highly accurate in matching the original model. In the experimental part of this paper, our algorithm is used to simulate the coupling interconnects and rlc transmission line model. High accuracy is obtained both in the frequency domain and time domain. Because of that, our algorithm is having a promising future to be used to deal with signal integrity problems.

**KEY WORDS:** Parametric, Model Order Reduction, Multi-port Interconnect, Signal Integrity

## 目录

1 绪 论 .....	1
1.1 模型降阶的基本原理 .....	2
1.1.1 电路的改进节点算法(MNA)算法 .....	2
1.1.2 基于矩匹配的模型降阶算法思想 .....	4
1.2 信号完整性问题产生背景 .....	6
1.2.1 定义 .....	6
1.2.2 低功耗设计带来的信号完整性新挑战 .....	8
1.2.3 特征尺寸减小带来的新的信号完整性挑战 .....	8
1.3 信号完整性问题分析方法 .....	9
1.3.1 传统信号完整性问题分析方法 .....	9
1.3.2 新的信号完整性问题的分析方法 .....	10
2 经典模型降阶算法 .....	11
2.1 渐进波形求值算法 (AWE) 及与其结合的RICE算法 .....	12
2.1.1 AWE算法 .....	12
2.1.2 RICE算法 .....	14
2.1.3 AWE的缺点 .....	19
2.2 无源互连线宏模型降阶算法 (PRIMA) .....	20
2.2.1 电路的稳定性及无源性 .....	20
2.2.2 算法推导 .....	22
2.3 无源和互易的模型降阶算法 (SPRIM) .....	24
2.4 基于区间限定的统计学建模算法 (Interval-Valued) .....	25
2.4.1 参数变化下的电路模型 .....	26
2.4.2 基于区间分析的AWE和PRIMA算法 .....	26
2.5 符号化模型降阶方法 (SMOR) .....	30
2.5.1 符号化仿真分析的物理表述 .....	30
2.5.2 二重矩匹配 .....	31
2.6 参数变化模型降阶方法在互连线分析中的应用 (Interpolation Method) .....	33
2.6.1 离散时间域上的矩匹配 .....	34
2.6.2 Lagrange插值法在模型降阶中的应用 .....	34
3 基于可观测标准型的多端口模型降阶算法 .....	37

3.1 系统状态方程 .....	37
3.2 系统的可观测性 .....	38
3.3 可观测标准型 .....	39
3.4 矩匹配 .....	41
3.5 OCFR算法 .....	43
3.6 $M$ 和 $B_q$ 的计算 .....	46
3.7 差值法解决参数变化问题 .....	48
4 实验与分析 .....	50
4.1 OCFR算法验证与分析 .....	50
4.2 参数变化下OCFR算法与插值算法的结合 .....	52
4.3 OCFR算法另一种矩匹配形式 .....	54
5 总结与展望 .....	57
5.1 本文的研究内容 .....	57
5.2 课题碰到的问题及进一步研究方向 .....	57
参考文献 .....	60
致谢 .....	64
攻读学位期间发表的学术论文 .....	66



## 图片目录

图 1 电路网络图及拓扑图 .....	2
图 2 MNA算法应用实例 .....	4
图 3 输出传输函数的分析 .....	5
图 4 常见的信号完整性问题 .....	7
图 5 在低功耗设计中的信号完整性问题[33] .....	8
图 6 Vdd变化对于窜扰脉冲传输的影响[33] .....	9
图 7 基于路径的窜扰分析[33] .....	10
图 8 简单的RLC电路 .....	16
图 9 零阶矩的求解 .....	16
图 10 一阶矩的求解 .....	16
图 11 电路的生成树表示 .....	18
图 12 两种基本的RC互连线电路模型 .....	18
图 13 RICE与PSPICE的时域仿真结果比较 .....	19
图 14 不同阶数下AWE算法仿真结果 .....	20
图 15 稳定但非无源的宏模型导致电路仿真过程发生震荡 .....	22
图 16 多端口网络模型及导纳矩阵表示 .....	23
图 17 PRIMA算法应用举例 .....	23
图 18 PEEC模型测试结果 .....	25
图 19 基本的区间分析AWE算法 .....	27
图 20 快速的基于区间分析的AWE算法 .....	28
图 21 基本的基于区间分析的PRIMA算法 .....	28
图 22 快速的基于区间分析的PRIMA算法 .....	29
图 23 网络的符号化分析 .....	31
图 24 R,L,C阶梯电路 .....	32
图 25 RLC电路频域仿真结果 .....	32
图 26 参数变化情况下SMOR算法的仿真结果 .....	33
图 27 参数化模型降阶分析结果 .....	36
图 28 耦合互连线模型 .....	50
图 29 $H(s)$ (1,2)项频率响应 .....	51
图 30 原模型极点及降阶模型极点表示 .....	51

图 31 传输函数项 $h_{11}(s)$ 及 $h_{12}(s)$ 的阶跃响应.....	52
图 32 RLC导线模型 .....	52
图 33 单一参数变化下的OCFR算法仿真结果.....	53
图 34 多参数变化下的OCFR算法仿真结果.....	54
图 35 RCC阶梯导线模型 .....	55
图 36 降阶模型与原模型的频率响应比较 .....	55
图 37 降阶模型与原模型的极点 .....	56
图 38 降阶模型与原模型的阶跃响应比较 .....	56

## 表格目录

表 1 使用RICE与使用PSPICE的速度比较 .....	19
表 2 两种基于区间分析AWE算法的比较 .....	29
表 3 两种基于区间分析PRIMA算法的比较 .....	30
表 4 $m_0, m_1, \dots, m_{14}$ 计算结果 .....	58

# 1 绪 论

随着集成电路领域芯片加工工艺技术向深亚微米领域发展，特征尺寸变得越来越小，互连线的耦合电容、电感对电路的影响越来越大，如何正确分析这些寄生参数对于整个电路所起的影响成为了众多电路设计人员不可回避的问题。为了能有效地捕捉互连线的影响，需要进行精确地进行电路级模拟仿真。

最为著名的电路模拟器 Spice[1]是由加州大学 Berkeley 分校在 20 世纪 70 年代开发的一个开源软件，它能非常准确有效地模拟电路，但是计算效率比较低，特别是对于大规模集成电路，进行仿真所需要的时间是无法让人忍受的。虽然之后在 Spice 的基础上，有 Avant 公司（现已被 synopsys 公司收购）逐渐开发出了商业化仿真软件 HSPICE 及 Cadence Design System 公司开发出了类似功能的 PSPICE，它们相对于 Spice 的精度和效率均有提高，但是在当今深亚微米工艺尺寸下，这些商业软件仍然不能对于较大规模的电路进行高效率地仿真分析。所以现在工业界急需一个能够在不牺牲很大精度情况下能够快速模拟大规模集成电路的新的仿真器，这也就是模型降阶算法的产生和逐步受到关注的原因。但是要深入地理解模型降阶算法在电路模拟中所起的作用，我们还需要从电路模拟的基本原理开始说起。Spice 仿真器先是对于输入的电路的 netlist 采用 MNA[10] (Modified Nodal Analysis) 算法转化为矩阵，电路中各个元件的参数就被存储在这个矩阵中，之后根据用户的需求（直流，交流，瞬态）分析，使用相应的方式对于矩阵进行变换及使用数值方式进行求解。所以，从以上不难看出，影响电路求解的速度因素中起决定性作用的因素就是矩阵求解的速度，大规模电路正是因为它所对应的矩阵过于庞大，所以在用已有的方法求解过程中非常复杂，现在急需一种快速高效率的这类矩阵的求解方法。研究人员发现，在一般情况下，不同电路所对应的一些矩阵是存在一些共性的，它们往往是稀疏矩阵，或者有一定的对称性，我们可以使用数值分析的方法对于这些矩阵作对应的变化，或者将它们简化下来，在损失很小精度的情况下，使总的运算次数与原来相比大大减少，这就是模型降阶思想。

而从另外一个方面，由于集成电路制造工艺的发展，特征尺寸变得越来越小，我们在设计过程中必须花费更多的精力考虑信号完整性问题。模型降阶算法可以被

用来分析信号完整性问题，它可以被用来分析耦合导线之间的窜扰。所以在本次毕业设计论文中，将介绍一些信号完整性的基本概念和分析方法，以及使用模型降价算法来分析信号完整性问题的实例。

## 1.1 模型降阶的基本原理

### 1.1.1 电路的改进节点算法(MNA)算法

一般电路，不管其复杂度，都可以将它抽象地使用基于拓扑结构的电路图表示。在这种图中，主要是考虑点和线之间的连接关系，而点的位置、线的长度以及几何弯曲程度则不予考虑。对于拓扑图，有以下几个基本定义：

节点(node): 拓扑图中各线段的端点

支路(branch): 连接两个节点之间的线段

回路(loop): 构成闭合路径的一组支路

有向图(directed graph): 支路具有方向的拓扑图

图 1 中所示的便是一个基本的电路网络图及其对应的拓扑图。

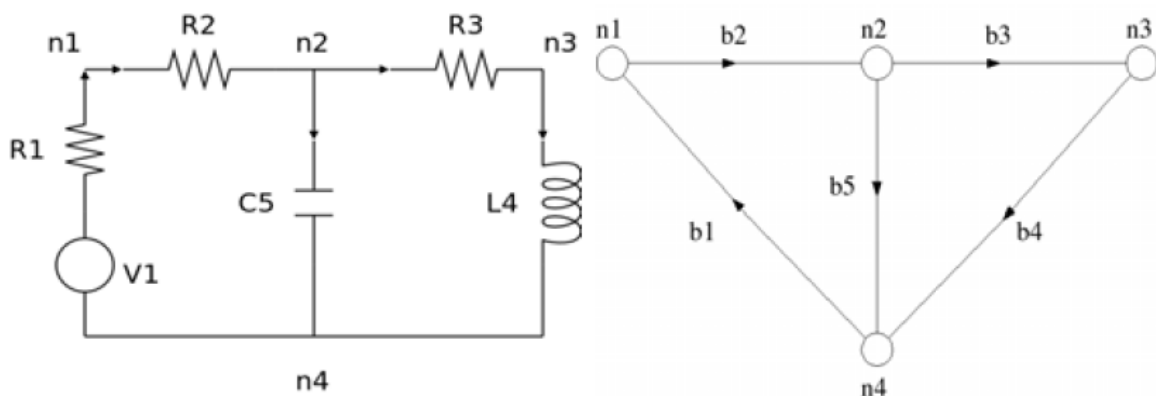


图 1 电路网络图及拓扑图

为了对于大规模的有向图进行分析，我们需要把有向图存储入计算机，这就要使用到关联矩阵(incidence matrix)的概念。

设一个有向图有 $n+1$ 个节点， $m$ 条支路，则 $E$ 是一个 $(n+1)*m$ 阶矩阵，它的行对应于节点，列对应于支路，其中元素 $a_{ij}$ 的定义为：

$a_{ij} = 1$ ，如果支路 $j$ 与节点 $i$ 关联，且支路 $j$ 的方向离开节点 $i$

$a_{ij} = -1$ ，如果支路 $j$ 与节点 $i$ 关联，且支路 $j$ 的方向指向节点 $i$

$a_{ij} = 0$ ，如果支路 $j$ 与节点 $i$ 无关联

将图 1 中的电路图用关联矩阵表示为

$$E = [a_{ij}] = \begin{matrix} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ \begin{matrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (1)$$

观察可以发现矩阵中的任何一行都可以由其它行线性表出, 所以我们通常去掉一行, 我们把去掉这行后的矩阵叫做关联矩阵, 我们一般可以选取 0 点(GND)作为参考节点。

我们通常使用 Kirchhoff 来求解电路, 它也可以通过关联矩阵来表达:

Kirchhoff 电流定律(KCL):  $E_{ib} = 0$

Kirchhoff 电压定律(KVL):  $E^T v_n = v_b$

其中  $i_b, v_b, v_n$  分别表示支路电流、支路电压和节点电压。我们也可以在关联矩阵中把同类元件的支路写在一起, 表示为

$$E = [E_g \quad E_c \quad E_l \quad E_v] \quad (2)$$

另外对于 RLC 电路, 还存在约束关系:

$$R: i_g = G v_g$$

$$C: i_c = C \frac{dv_c}{dt}$$

$$L: v_l = L \frac{di_l}{dt}$$

将这些约束关系表达式与电路的 KCL, KVL 方程相结合, 并且消去尽可能多的未知电流, 我们可以把电路描述成改进节点法的形式:

$$\begin{aligned} C\dot{x} &= -Gx + Bu \\ y &= L^T x \end{aligned} \quad (3)$$

其中

$$C = \begin{bmatrix} E_c C E_c^T & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} E_g C E_g^T & E_l \\ -E_l^T & 0 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} \quad (4)$$

通常情况下, 对于电路的一般情况 C 矩阵表示储能元件电容和电感对电路方程的贡献, G 表示耗能元件电阻和电导对电路方程的贡献。x 是状态变量, 包括所有节点的节点电压和独立电压源及电感支路的电流。图 2 和(5)式表示一个使用 MNA 算法

表示电路的实例。

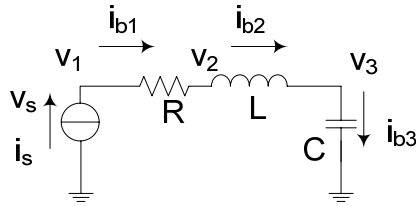


图 2 MNA 算法应用实例

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \\ \dot{V}_3 \\ \dot{i}_L \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 1/R & -1/R & 0 & 0 \\ -1/R & 1/R & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ i_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} i_s \quad (5)$$

$$u_s = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ i_L \end{pmatrix}$$

### 1.1.2 基于矩匹配的模型降阶算法思想

从上面介绍的MNA算法中我们可以看到，系数矩阵C和G的阶数等于电路中节点数加上电感支路数再加上端口数。这样看来对于现在工程中实际要使用的电路来说，这个方程的系数矩阵将有很高的阶数，这样直接求解在速度和精度方面来讲效率都比较差，这种情况下的求解过程为我们提出了很大的挑战。

从另一方面来看，对于电路仿真来说，我们往往只关心输入和输出的关系是什么，即传输函数。而对于电路内部的状态变量比如一些节点的具体电压电流并不关心。因此如果能够找到另一个系统，它的状态变量比原来少很多，从而可以加快仿真的速度，但是它又能够很好得近似原系统的输入输出关系，那将带来很大的便利。这就是模型降阶的初衷，希望找到另一个小规模模型，它的传输函数在一定程度上近似原电路的传输函数，那么就把这个模型称为降阶模型。这个降阶模型可以是一个等价电路，也可以仅仅是一个对于仿真器来说等价的数学模型。

既然我们提到要使用阶数较低的模型的传输函数来近似匹配原模型的传输函数，那我们就要分析两个传输函数在何种情况下能够做到较好的匹配，这里就要提到矩的概念。为了分析方便，我们将原系统的传输函数表示为  $H_{orig}(s)$ ，而降阶后

系统的传输函数表示为  $H_{redu}(s)$ 。为了在频率点  $s_0$  附近让这两个传输函数匹配，我们分别对于两个传输函数在  $s_0$  点使用泰勒展开，可以表示为

$$\begin{aligned} H_{orig}(s) &= a_0 + a_1(s-s_0) + a_2(s-s_0)^2 + a_3(s-s_0)^3 + \dots \\ H_{redu}(s) &= b_0 + b_1(s-s_0) + b_2(s-s_0)^2 + b_3(s-s_0)^3 + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $a_0, a_1, a_2, \dots$  及  $b_0, b_1, b_2, \dots$  在这里被称为原系统与降阶系统的0阶，1阶，2阶，3阶矩，由于  $s$  在  $s_0$  附近作很小的变化过程中  $s$  的低次项在两个函数的匹配过程中需要优先考虑，所以我们要优先匹配低阶矩。

那么既然我们已经了解到矩匹配在模型降阶算法中的重要性，那么我们接下来要介绍矩匹配中一些常用的方法。首先，为了分析方便，我们假设系统的状态方程为

$$\begin{aligned} C\dot{x}(t) &= -Gx(t) + Bu(t) \\ y(t) &= B^T x(t) \end{aligned} \quad (7)$$

则它的传输函数为  $H(s) = B^T (sC + G)^{-1} B = B^T P(s) = Q(s)^T B$ ，其中传输函数表达式中有三项，将后两项结合为  $P(s)$ ，将前两项结合为  $Q(s)^T$ ，我们也可以更形象地使用下面的框图来表示

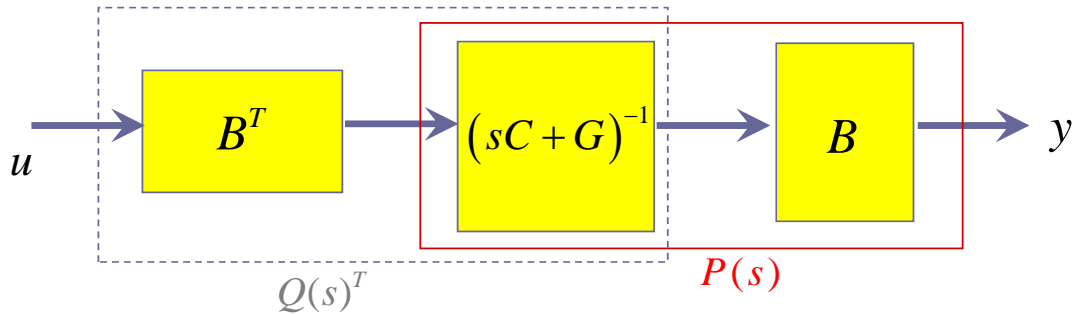


图3 输出传输函数的分析

当我们将传输函数的后两项结合时，这时称为输入矩的情况，可以使用如下的展开形式

$$\begin{aligned} P(s) &= (I + (s-s_0)A_n)^{-1} R_n = \sum_{i=0}^{\infty} A_n^i R_n (s-s_0)^i \\ A_n &= (s_0 C + G)^{-1} C, R_n = (s_0 C + G)^{-1} B \end{aligned} \quad (8)$$

而当我们将传输函数的前两项结合时，这时称为输出矩的情况，可以使用如下



的展开形式

$$Q(s) = (I + (s - s_0)A_{out})^{-1} R_{out} = \sum_{i=0}^{\infty} A_{out}^i R_{out} (s - s_0)^i \quad (9)$$

$$A_{out} = (s_0 C + G^T)^{-1} C, R_{out} = (s_0 C + G^T)^{-1} B$$

这里是两种矩匹配的形式，而我们接下来将要提到的很多模型降阶算法都是基于这两种矩匹配的形式。那么我们下一步要考虑如何将原来的系统模型化简为降阶的系统模型，这里要介绍一个矩阵投影的概念，具体做法就是将原系统矩阵  $B, C, G$  分别左乘和右乘相同矩阵得到阶数较低的矩阵  $B_r, C_r, G_r$ ，这种做法思想的本质就是由于原系统矩阵中  $0$  项和冗余项很多，我们可以通过适当的矩阵变换将这些项消去，仅保留我们感兴趣的部分得到阶数较低的对应矩阵。投影的方法有两种，一种是正交投影，表示如下

$$C_r = V^T C V, G_r = V^T G V, B_r = V^T B \quad (10)$$

其中满足  $V^T V = I$ 。而另外一种被称为任意投影，表示如下

$$C_r = W^T C V, G_r = W^T G V, B_r = W^T B \quad (11)$$

而降阶后的系统传输函数可以表示为

$$H_r(s) = B_r^T (s C_r + G_r)^{-1} B_r \quad (12)$$

这两种方法各有利弊，正交投影计算比较方便，只需要使用一次 Krylov 子空间计算，但是它仅能够匹配  $r$  阶 ( $r$  是降阶后系数矩阵的阶数) 矩，而任意匹配计算比较复杂，需要计算两次 Krylov 子空间，但是相应的它能够匹配  $2r$  阶矩。

## 1.2 信号完整性问题产生背景

### 1.2.1 定义

信号完整性(Signal Integrity,简称 SI) 指的是信号在电路中能够以正确的时序和电压做出响应的能力。当电路中信号能够以要求的时序、持续的时间和电压同时到达接收端的集成电路芯片时，我们就说该电路具有较好的信号完整性。反之，当信号不能正常响应时，就出现了信号完整性问题。

信号完整性问题可能会带来误判或者丢失部分数据，严重时，会造成整个系统性能的下降，甚至根本不能正常工作。因此，现在的高速数字系统设计中，信号完整性问题的控制已经毋庸置疑的成为决定设计成败的关键因素之一。图 4 中所表示

的是波形分析中碰到的常见的信号完整性问题。

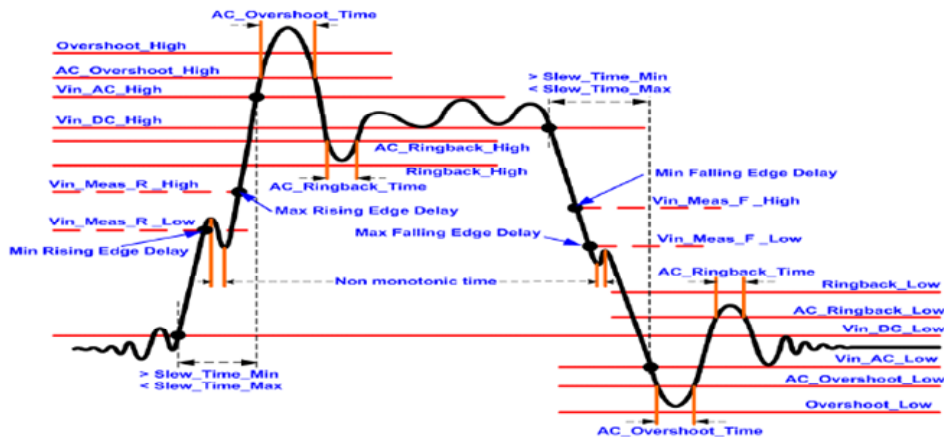


图 4 常见的信号完整性问题

另一方面信号完整性问题，主要可以分为以下几个方面：

### 1. 反射、过冲、振铃、多次跨越逻辑电平错误

传输过程中的任何不均匀(如阻抗变化、直角线或过孔)都会引起信号的反射，反射的结果对模拟信号(正弦波)将形成驻波，对数字信号则表现为上升沿、下降沿的振铃和过冲。

### 2. 串扰 (Crosstalk)

串扰是指导线之间不必要的信号耦合，它可以是电容性的或者是电感性的。电容性串扰是指信号线路之间的信号电容耦合，当线路以一定的距离彼此靠近时，会出现这种情况。电感性串扰可以看作是不需要的变压器的原线圈和次级线圈之间的信号耦合。变压器的线圈就是电路板或者系统上的电流环路，它可能是由无效的布局造成的人造环路，也可能是信号路径和信号返回路径综合形成的自然环路。

### 3. 电源分布

电源分布网络是高速电路板设计中最重要考虑因素。电源分布网络必须为低噪声的电路板上各部分电路提供一个低噪声的电源，包括 VCC 和接地。电源分布网络同时还须为电路板上所有产生或接受的信号提供一个信号回路。

### 4. 电磁兼容性(EMC)

EMC 是研究在有限的空间、时间和频谱资源的功能条件下，各种电气设备可以共同工作，并不发生降级的科学。另外一种解释，EMC 是一种技术，这种技术的目的在于使电气装置或系统在共同的电磁环境条件下，既不受电磁环境的影响，也不给环境以这种影响。换句话说，就是它不会因为周边的电磁环境而导致性能降低、功能丧失或损坏，也不会周边环境中产生过量的电磁能量，以致影响周边设备的

正常工作。

### 1.2.2 低功耗设计带来的信号完整性新挑战

业界在向 65 纳米节点变迁过程中，迫切需要低功耗设计，但随之而来的是新的 SI 挑战，如图 5 所示。究其原因，可以归结为以下几个原因：

首先，低功耗设计使用了多阈值电压值( $V_t$ )门电路。高  $V_t$  的器件往往具有更高的保持阻抗，从而更易受串扰的影响。另一方面， $V_t$  较低器件作为干扰传递者情形更糟糕，因为它们的转换速度较快。而且，它们在输入端还往往对波形影响更敏感。总体而言低功耗设计中，需要谨慎处理时序、功率和噪声的权衡取舍问题。

其次，低功耗设计的另一个重要方法是使用时钟关断来节省电力消耗。导通和关断过程在电源轨中产生瞬态效应，这可能对电路中仍在工作的其它部分造成影响。

另外，Intel 等公司主推的动态电压和频率调整技术(DVFS)是一种新的低功耗 SOC 设计技术。利用这种技术，设计人员能够在芯片运行的同时动态地为不同模块设置不同的电压或不同的频率。当采用 DVFS 技术时，设计人员需要针对每个模块所允许的电压和频率的所有可能组合，对芯片性能进行验证，这大大增加了电气分析的复杂性和时间要求。而使用传统分析解决方案的另一项考虑因素，是每一个电压点都需要不同的库。图 5 中介绍了在低功耗设计中信号完整性的分析过程。

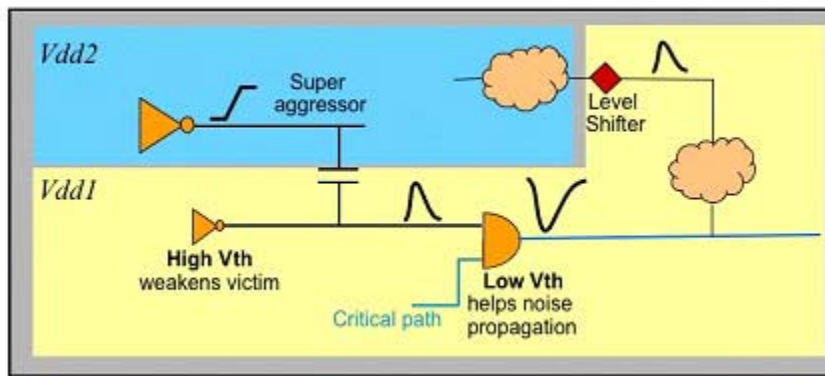


图 5 在低功耗设计中的信号完整性问题[33]

### 1.2.3 特征尺寸减小带来的新的信号完整性挑战

在向深亚微米工艺 65nm, 45nm 变迁过程中，除了低功率设计方面的考虑，其它的一些 SI 问题也开始涌现。由于电压与工艺尺寸对应成比例降低， $V_{dd}$  和  $V_t$  之间的电压差在减小。由于门电路的性能很大程度上受到其表达式中  $(V_{dd} - V_t)^2$  项的影

响,所以在深亚微米中的电压变化会对门电路的延迟以及抗噪声特性产生很大影响。图 6 中显示了在 65nm 工艺中 Vdd 变化会对于窜扰脉冲的传输产生如何影响。现在设计者通常使用片上变化系数(On-Chip-Variation)来显示 Vdd 及温度变化对于芯片的影响。但是当工艺尺寸降低到 65nm 及以下时,OCV 参数会变得很大,这就需要我们有一个能够快速直接控制电压和温度的设计方法。

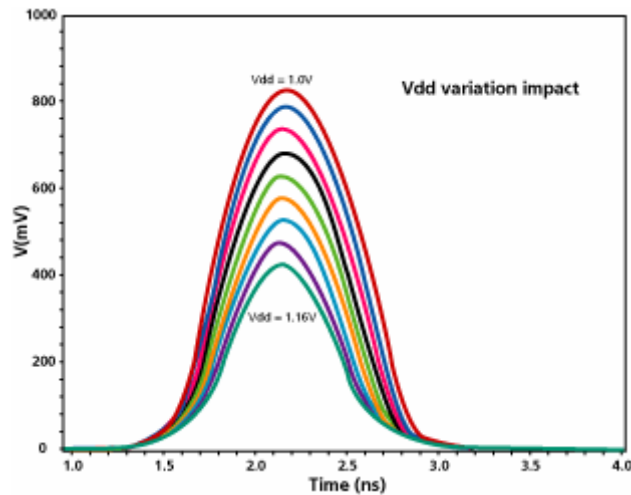


图 6 Vdd 变化对于窜扰脉冲传输的影响[33]

另一方面,软错误对于 65nm 工艺下芯片的精确度影响越来越大。这种问题的产生原因是由于封装材料中的微粒或者不纯净的放射性物质,例如铅的影响下产生的。这些微粒会导致芯片中电荷的增加并且会导致芯片中储存逻辑值的变化。

### 1.3 信号完整性问题分析方法

#### 1.3.1 传统信号完整性问题分析方法

信号完整性的分析方法是一个很大的讨论及研究课题,本次毕业设计对此课题不做展开,仅仅做一些基本的介绍。现今业界解决信号完整性的方法主要分为两部分,一部分是根据经验理论对于设计方法的改进来尽量减少信号完整性问题的产生,这需要设计者熟悉信号完整性问题产生的原因,对于传输线理论及电磁场理论有一定了解,在设计过程中要遵守信号完整性工程师总结出的设计规则和限制来进行设计,这样就可以很大程度上避免很多不必要的信号完整性问题。

另外一部分就是依靠模型及相应软件仿真进行信号完整性问题分析。现在主要采用的模型有以下几种:SPICE 模型,IBIS 模型及 Verilog-AMS 和 VHDL-AMS 模型。它们的特点是,SPICE 模型属于晶体管级,它的精度好,但是缺点是它的模型

存储量大，仿真速度慢，而且各个厂商对于该级别的模型保密性好，一般很难获得器件的 SPICE 模型；IBIS 属于宏模型，它可以由电路的 SPICE 模型转化而来，它的存储空间小，仿真速度快，缺点是仿真精度不够好；Verilog-AMS 和 VHDL-AMS 模型属于行为级模型，它的模型复杂度由设计者自己决定，灵活性好，精度较高，仿真速度和模型存储量由模型的设计而定，用户可配置性强。而对于 SI 问题分析的工具，synopsys 有 PrimeTime SI，cadence 公司有 CeltIC，SPECTRAQuest SI Expert，Mentor Graphics 公司有 Hyperlynx，IS-Analyzer，IS-Floorplanner，IS-MultiBoard 等软件。每种软件都有其对应的特点和分析问题，需要根据具体问题选择相应的软件，这里对此不做展开分析。

### 1.3.2 新的信号完整性问题的分析方法

前面我们提到了由于低功耗设计要求，和特征尺寸继续减小带来新的信号完整性问题挑战。为了应对这些新的问题，信号完整性工程师提出了以下几种应对方法。第一种方法是不必在信号完整性分析过程中显得过于悲观。虽然分析软件假设在整个设计过程中都会发生最坏情况，它假设每条导线都会被它周围的导线以最坏的情况下影响。但是实际情况下的状况是这样的情况一般不会发生，我们可以通过算法层面上的考虑以及设定门级电路设计规则来限制这种情况的发生。我们可以使用统计分析方法来仿真一些更加实际的设计情况，而不是仅仅去分析最坏的情况，虽然这样分析会含有隐患，但是这样能够大大简化分析过程。

另一种方法是在信号完整性分析中对于窜扰引起的延迟变化分析中更多地使用实际的模型。我们应该把分析的重点放在一个特定噪声对于整个路径的影响上，而不仅仅放在窜扰发生的地方，图 7 中所表示的就是这种对于分析整个路径的影响能够大大减少对于路径延迟分析的悲观性。

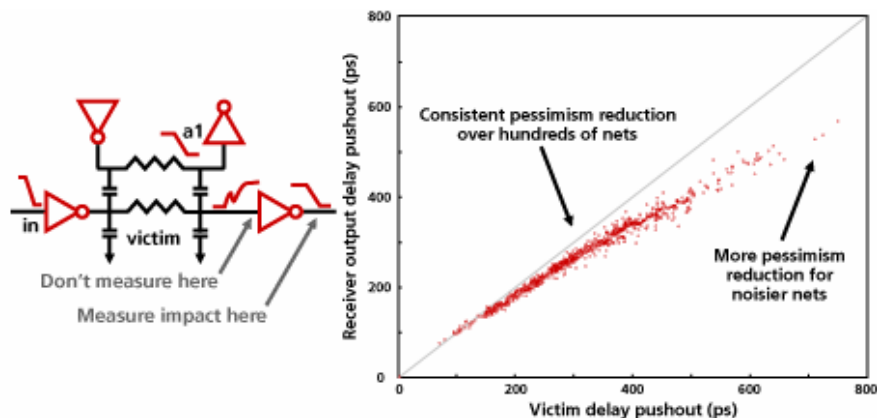


图 7 基于路径的窜扰分析[33]

## 2 经典模型降阶算法

针对不同线性电路的特点，人们通常对它们的降阶模型感兴趣，提出了许多模型降阶方法。目前的研究基本上分成两个方向向前发展。

第一类方法是基于矩匹配（**Moment Matching**）的降阶模型方法。它又分为两类：一类是利用 **Pade** 近似来进行瞬态匹配降阶[2][3][5][6][7][8][27][28]。由 **L. T. Pillage** 首先提出了著名的 **AWE**(Asymptotic Waveform Evaluation)[3]算法，该算法相对于传统的 **Spice** 仿真器来说是一个进步，能够很好地匹配  $2n$  阶矩，计算的精确性也能够得到保障，但是该算法的计算速度还是不够理想。之后，在该算法的基础上，研究者又提出了很多新的算法，这些算法有一个共性，都是建立在由 **Krylov** 子空间投影算法产生的降阶模型，避免了 **AWE** 算法在矩匹配过程中需要直接计算矩的缺点。**R. Freund** 提出了基于 **Lanczos** 迭代的 **Krylov** 子空间算法而进行 **Pade** 近似的降阶算法 **PVL** [5]，之后他又加以改进提出了多端口的 **MPVL** 算法 [2]，以及对于与 **RLC** 电路的单端口的 **SyPVL** [27] 及多端口的 **SyMPVL** [28]。另一种基于 **Krylov** 子空间的是 **Anoldi** 算法，由于它在模型降阶中的应用，相应产生了由 **A. Odabasioglu** 提出的 **PRIMA** 算法[8]，该算法能够保持电路的稳定性和无源性，但是仅仅针对固定的电路形式。

另一类计算降阶模型的方法是平衡截断实现法（**Truncated Balanced Realization**）[16]，它是在控制领域的研究中产生的，它能产生一个接近优化的 **Hankel-norm** 近似，并且有著名的  $L^\infty$  传输函数误差限。但是它需要求解两个 **Lyapunov** 方程，计算量非常大。**Jing-Rebecca Li** 等[17]根据这个原理，利用系统的主可控子空间来计算互连线的降阶模型，取得了比较好的效果。最近，**Janet M. Wang** 等[18]提出了一种基于时域技术的降阶模型方法，对于处理有强烈互感的互连线有非常好的效果。

另外，在经历了对于模型降阶数十年的研究后，现在的研究者已不满足于仅仅进行理想情况下的研究，而是与电子工业的发展结合起来。由于工艺尺寸的不断缩小，以及在加工过程中各类环境，材料因素的影响，现在的集成电路的产品的性能可能与设计时理想的性能相差很大，而且随着工艺尺寸的继续缩小，这种影响的

效果将会更显著。所以我们在模型降阶的过程中也要考虑到电路参数的变化情况对于整个系统的影响。对此，如何在电路的参数变化的情况下进行模型降阶成为了现今的一个研究的热点。Ying Liu[31]分析了参数扰动对于 PACT[23]及 PRIMA 算法的影响，James D.Ma[30]提出了使用有限区间来对参数变化的概率密度函数进行分析，并且与传统的 Monte Carlo 方法结合，并且将他所提出的算法应用到了 AWE 算法和 PRIMA 算法之上进行了误差分析。

## 2.1 渐进波形求值算法（AWE）及其结合的 RICE 算法

Lawrence T. Pillage 是把模型降阶算法引入到电路仿真中的先驱，他在 1990 年提出的 Asymptotic Waveform Evaluation (AWE) [3] 方法使得当时对互连线时延的计算的速度大大提高，这个方法在 EDA 工具中也被应用。下面简要介绍一下 AWE 的思想，虽然在现在看来，当时的方法比较原始，而且精度不高，电路的很多其他特性也无法保证，但是这却是一个开创性的工作，使得当时对互连线时延的计算的速度大大提高，并开辟了 EDA 方向的又一个研究热点。

### 2.1.1 AWE 算法

首先，采用 MNA[10](Modified Nodal Analysis)电路方程式表示法，一个集总的、线性的、时间为变量的电路通常可以用一阶微分方程表示：

$$\begin{aligned} C\dot{x} &= -Gx + bu \\ y &= l^T x + du \end{aligned} \quad (13)$$

其中向量  $x$  代表电路的变量。矩阵  $G$  代表非储能元件的影响，如电阻。矩阵  $C$  代表储能元件的影响，如电容和电感。 $y$  是激励的输出， $bu$  及  $du$  代表来自独立源的激励。传统仿真器 spice 的模拟过程就是求解以上微分方程以得到电路的各种特性分析数据。所以如何快速高效解该矩阵微分方程成了模型降阶的课题。

AWE 的基本过程是用电路传输函数  $H(s)$  的极点和余式的一个子集去近似原来的  $H(s)$ ：

$$\hat{H}(s) = \frac{k_1}{s - p_1} + \frac{k_2}{s - p_2} + \dots + \frac{k_q}{s - p_q} \quad (14)$$

其中  $p_i$  和  $k_i$  是分别是极点和余式。 $q$  是近似的阶数。这个式子很容易写成时域对应的响应：

$$\hat{h}(t) = k_1 e^{p_1 t} + k_2 e^{p_2 t} + \dots + k_q e^{p_q t} \quad (15)$$

这个函数就是我们想得到的对于原系统传输函数的一个近似。

AWE 使用矩匹配 (moment-matching) 来唯一确定  $k$  和  $p$ 。 $\hat{H}(s)$  的矩必须保持和实际电路的矩相等。通常我们定义时域函数  $h(t)$  的  $i$  阶矩为:

$$m_i = \frac{(-1)^i}{i!} \int_0^{\infty} t^i h(t) dt \quad (16)$$

把这个式子应用到  $\hat{h}(t)$  上我们就得到:

$$\hat{m}_i = \frac{k_1}{p_1^{i+1}} + \frac{k_2}{p_2^{i+1}} + \dots + \frac{k_q}{p_q^{i+1}} \quad (17)$$

所以, 对于  $q$  阶的近似会有  $q$  个未知极点 ( $p_1 \dots p_q$ ) 和  $q$  个未知余式 ( $k_1 \dots k_q$ ), 一共是  $2q$  个未知数。解  $2q$  个未知数需要  $2q$  个独立方程, 它们是:

$$\begin{aligned} k_1 + k_2 + \dots + k_q &= m_{-1} \\ \frac{k_1}{p_1} + \frac{k_2}{p_2} + \dots + \frac{k_q}{p_q} &= m_0 \\ \frac{k_1}{p_1^2} + \frac{k_2}{p_2^2} + \dots + \frac{k_q}{p_q^2} &= m_1 \\ &\vdots \\ \frac{k_1}{p_1^{2q-1}} + \frac{k_2}{p_2^{2q-1}} + \dots + \frac{k_q}{p_q^{2q-1}} &= m_{2q-2} \end{aligned} \quad (18)$$

注意到等式右边是实际电路对于某个特定激励响应的  $2q$  个矩。接下去可以使用 Newton-Raphson 算法或者其它迭代算法来求解上述方程组。Pillage 提出的算法是将电路的矩所满足的关系写成如下矩阵:

$$\begin{bmatrix} m_{-1} & m_0 & \dots & m_{q-2} \\ m_0 & m_1 & \dots & m_{q-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ m_{q-2} & m_{q-1} & \dots & m_{2q-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{q-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{q-1} \\ m_q \\ \vdots \\ m_{2q-2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

而由该矩阵求出的解  $a_i (0 \leq i \leq q-1)$  与  $p_i (1 \leq i \leq q)$  满足,  $p_i$  是以  $a_i$  为系数的下述



方程的解:

$$a_0 + a_1 p^{-1} + a_2 p^{-2} + \cdots + a_{q-1} p^{-q+1} + p^{-q} = 0 \quad (20)$$

这样在求出  $p_i$  后代入到(7)式中继续求出  $k_i (1 \leq i \leq q)$  的值, 这样便求出了近似传递函数(14)式中所有的未知量。当然, 在求解的过程中仍然有很多特殊的情况, 比如当有重极点的时候, 方程组就会变得奇异, 但这都可以通过一些技巧解决。

可以看出 AWE 算法在求解的过程中需要解线性方程组(18), 需要求解高次方程的根(20), 需要根据(16)式求出电路的  $2q$  阶矩, 实际的计算量比求解最初的传输函数  $H(s)$  减少了很多但也是相当大的, 所以由于 AWE 算法的这些缺陷, 导致了后来 PRIMA[8], PVL[5], SPRIM[9]等算法的产生。

### 2.1.2 RICE 算法

从另一方面看该算法一个重要的条件就是要已知电路的  $2q$  阶矩的值, 但是对于一个给定的电路, 这些矩的值也是需要我们计算得到的, 所以为了快速求解这些矩的值 Pillage 及 Ratzlaff 提出了 RICE(Rapid Interconnect Circuit Evaluation)算法[25]。而且这里不仅要考虑计算速度的问题, 还要保证算法的稳定性和精度。

RICE 算法的思想是用求解树的方式来求解电路的矩。RICE 的巧妙之处在于它没有直接通过矩阵运算去得到矩, 而是利用电路自身的拓扑结构, 通过反复迭代的直流分析, 最后计算出电路的矩。能够应用这一技巧的主要原因是观察到 RC 互连线模型在拓扑结构上大致可以看成由电阻  $R$  组成的支撑树 (spanning-tree) 和由电容  $C$  组成的连枝 (branch) 构成。所以可以用对树结构遍历的方法快速求解矩, 而对于电路中不符合这一要求的那些支路, 也能通过其他的方法处理, 但会牺牲掉一些性能。

RICE 算法的基本思想如下:

对于电路方程(13)进行 Laplace 变换得到

$$\begin{aligned} sCX(s) &= -GX(s) + bU(s) \\ Y(s) &= l^T X(s) + dU(s) \end{aligned} \quad (21)$$

对于  $X(s)$  我们可以进行 Taylor 展开得到

$$X(s) = X_0 + X_1 s + X_2 s^2 + \cdots \quad (22)$$

代入(21)式忽略  $bU(s)$  得到下式

$$sC(X_0 + X_1s + X_2s^2 + \dots) - Cx(0) = -G(X_0 + X_1s + X_2s^2 + \dots) \quad (23)$$

根据  $s$  指数的关系我们容易得到:

$$\begin{aligned} Cx(0) &= GX_0 \\ CX_0 &= -GX_1 \\ CX_1 &= -GX_2 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (24)$$

这是 RICE 思想的数学表述, 接下去我们介绍一下它的物理表述:

1. 把输入替换成与稳态值相等的直流激励源, 所有电容替换成电流为 0 的电流源, 所有电感替换成电压为 0 的电压源。
2. 对电路做直流分析, 求得所有电压源的电流, 作为其对应电感在本次迭代中的矩。同样也求得所有电流源的电压, 作为其对应电容在本次迭代中的矩。
3. 把输入替换成 0 值激励源, 并把电容电压源和电感电流源的值设为上一次迭代的矩分别与电容、电感自身的值相乘后的结果, 然后返回执行第 2 步。以此类推, 迭代  $q$  次后将得到电路的  $q$  阶矩。

在求矩的每次迭代过程中, 最主要的工作就是解一个直流电路。电路中只包含电阻、电压源和电流源。一般来说, 直流分析有很多方法, 关键是解一个线性方程。考虑互连线网络具有树状的结构, 因此可以采用一种特殊的方法来求解, 以提高 AWE 的效率。

下面描述的是一个具体的过程, 图 8 是一个基本的 RLC 电路, 它包含电源、电阻、电容和电感器件, 假设在 0 时刻该电路在电源的作用下处于稳态, 则此时刻我们记下通过各电容的电流和各电感两端的电压作为电容和电感的 0 阶矩, 这里在(23)式中的表述即是  $x(0)$  项。由于互连线的寄生参数大多数情况下, 电阻和电感是沿着导线的, 而电容多是对地电容和两根导线之间的耦合电容, 所以上述假设去掉一些特殊的支路后几乎总能成立。

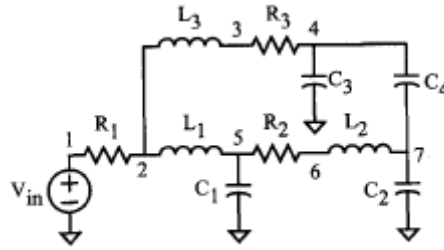


图 8 简单的 RLC 电路

接下去我们将电路的电压源置 0，然后将每一个电感看成是一个电压源，它的数值大小是该电感的大小乘以上一步求出的该电感两端的电压，同时将每个电容看成是一个电流源，它的数值大小是该电容的大小乘以上一步求出的通过该电容的电流大小，之后继续对于变换的电流作 DC 分析，这一步在(24)式中即是  $C_x(0)$  项的物理含义，而在这一步求出的每个电容所代表的电流源两端的电压和通过每个电感所代表的电压源的电流作为电感和电容的 0 阶矩，这里在(24)式中代表  $X_0$  项。然后如(24)式所示，将上一步求出的项作为源进行 DC 分析再求出电容电感的下一阶矩。

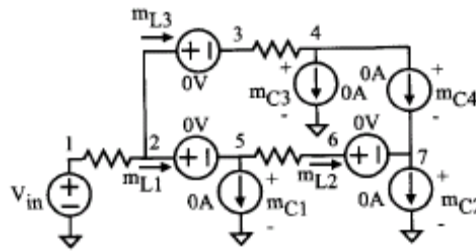


图 9 零阶矩的求解

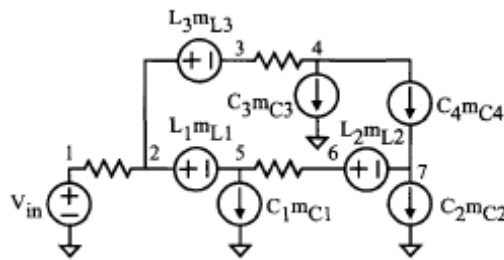


图 10 一阶矩的求解

接下去，我们将对 RICE 对于树的算法进行一个总结：基于这种思想，只需要对支撑树进行两次深度遍历就可以完成一次直流分析：

1. 反向深度遍历

首先从一个叶节点开始，访问某一个节点的时候，把它所有从子节点来的树枝

的电流与同它相连的连枝的电流求和,并由 KCL 定律可以马上知道求和结果就等于该节点向上树枝的电流。

反向遍历保证了遍历的时候只有当从一个节点所有子节点来的支路的电流都已知时才计算该节点到父节点支路的电流。这一遍历过程一直进行到根节点为止,这样所有支路的电流都是已知的了。其中电感支路的电流就是我们要求的矩,而电阻支路的电流将在前向深度遍历中用来计算电阻两端的电压。

## 2. 前向深度遍历

从根节点开始,计算每一个节点的子节点的电压。子节点的电压等于父节点的电压减去父节点到子节点的支路上的电压降。对于电压源支路和电感支路,因为在迭代之前电感已经被替换成了电压源,所以它们的支路电压都是已知的。对于电阻支路,因为在反向深度遍历中已经求得了支路电流,所以只需要乘以电阻的阻值就能得到支路电压。节点访问的顺序为反向深度遍历的逆序,这保证了只有当一个节点的父节点电压已知时才计算该节点的电压。

遍历一直进行到访问过所有的节点为止,这样每一个节点的电压就是已知的了,把电容两端的电压相减就能求出电容支路上的电压,也即电容对应的电流源的电压。

研究后可以发现,上述遍历过程只取决于电路本身的拓扑结构,是在电路存在的时候就已经确定的。虽然每次迭代中各电流源、电压源的值发生变化,但不改变计算的公式。因此,如果每次迭代都重新遍历就显得有些多余。一种更有效率的方法是可以仅对支撑树遍历一次,记录下每个支路电流、电压的计算公式,然后迭代的时候把具体的数值代入即可。

以上是 RICE 算法思想的一个介绍,在实际求解过程中将电路作为生成树进行求解,图 11 是图 8 所示电路的一个基于树的表述形式, RICE 中使用了虚拟遍历的算法减少了为了求解电路所有的矩所要求的遍历树的次数。

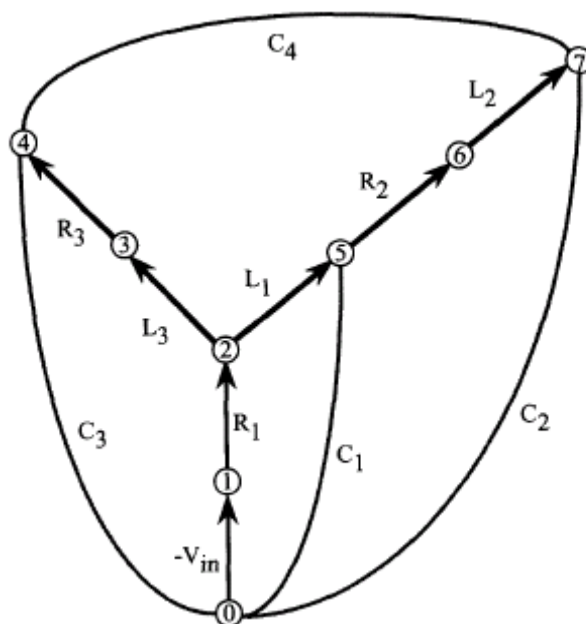


图 11 电路的生成树表示

RICE 算法的应用大大提高了 AWE 算法的效率，以至于后续的 PRIMA 算法也是建立在 RICE 算法求解矩的基础上进行的。下图是一个使用 RICE 算法的基本例子：

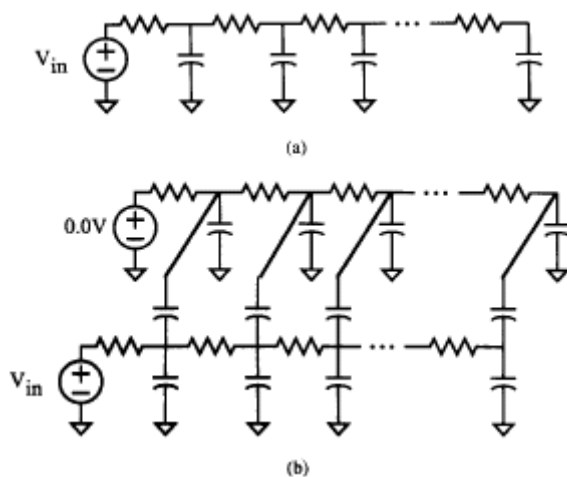


图 12 两种基本的 RC 互连线电路模型

RICE 可以达到比 PSPICE 快得多的速度：

类型	节点数	支路数	RICE (秒)				PSPICE (秒)
			分析	建立	计算	总计	
RC 树	2000	4000	0.49	0.11	0.07	0.67	98.15
	8000	16000	2.33	0.48	0.28	0.28	1170.67
耦合 RC 树	1600	4000	0.58	0.11	0.07	0.76	97.60
	6400	16000	3.38	0.44	0.30	3.02	908.7

表 1 使用 RICE 与使用 PSPICE 的速度比较

从表中还可以看出对于该电路图，RICE 算法也有着很好的精确度。

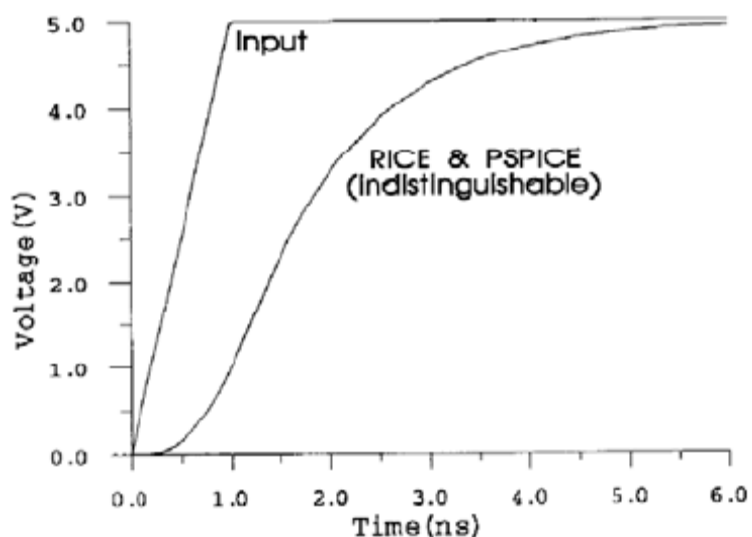


图 13 RICE 与 PSPICE 的时域仿真结果比较

可见，使用 RICE 算法使模型降阶后既提高了仿真速度，还依然可以满足一定的精度，这对于大规模的电路仿真尤其重要。

### 2.1.3 AWE 的缺点

虽然 AWE 在电路的模型降阶上取得了巨大的成功，但从实验的结果来看，它仍然存在不少限制，既有数值计算方面的，也有实际应用方面的。

首先 AWE 的一个最主要的不足就是降阶模型的阶数不能太高，也就只能产生

少数几个精确的极点和零点。因此，对于 RC 互连线这种简单的电路来说这已经足够胜任了，但是如果对于更加复杂一些的电路，比如有电感或者互感的，AWE 往往不能得到精确的结果。

AWE 是依靠匹配降阶模型和实际电路的矩 (moment) 来确定降阶模型的极点和余式的，这是一种基于 Pade 近似的方法。在理想情况下，如果匹配足够多的矩，就可以任意提高算法的精度， $\tilde{H}(s)$  就会无限接近  $H(s)$ ，但是事实上并不是这样。

一般来说，在 10 阶以下，增加阶数还能够提高精度，但是超过 10 阶之后，精度就无法继续提高了。

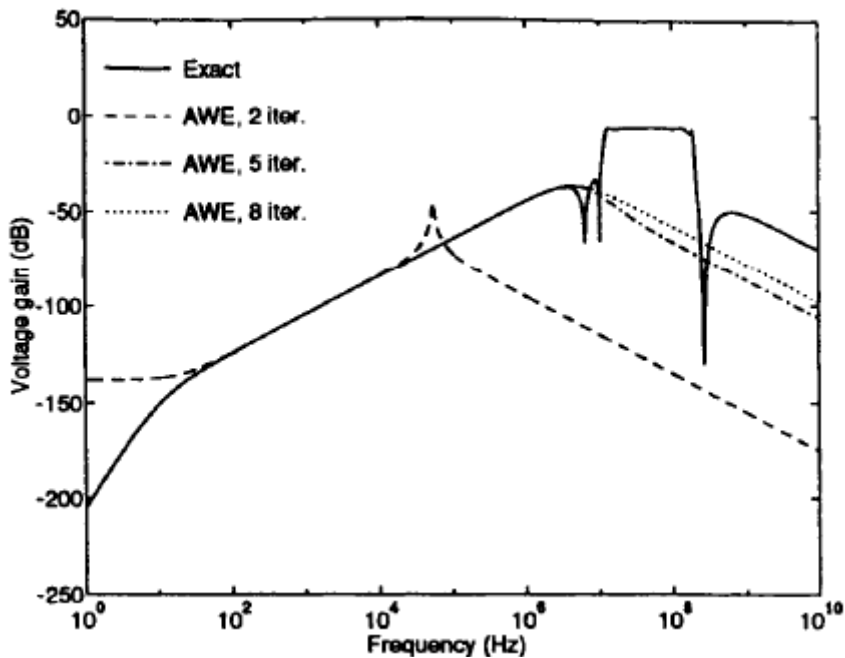


图 14 不同阶数下 AWE 算法仿真结果

## 2.2 无源互连线宏模型降阶算法 (PRIMA)

该算法由 A.Odabasioglu[8]在 1998 年提出，它针对 Block Arnoldi 算法[29]不能保持模型无源性的问题加以改进。对于一个电路系统，通常都可以把它分为线性元件和非线性元件两个集合，而所有的线性元件可以组成一个 N 口网络，它的特性完全由端口上的 Y 参数或者其他参数决定。

### 2.2.1 电路的稳定性及无源性

在模型降阶的过程中，我们不能仅仅考虑降价的模型是否准确简洁，还有两项重要的特性需要我们考虑。

### 1. 稳定性 (Stability)

一个系统，如果对任意的有界输入，其零状态响应也是有界的，则称该系统是有界输入有界输出 (BIBO) 稳定的系统，简称稳定系统。

另一种表述如下，如果一个系统对所有的激励信号满足  $|u(t)| \leq M_u$ ，其响应  $y(t)$  满足  $|y(t)| \leq M_y$ ，其中  $M_u, M_y$  都是有界正值，则称该系统为稳定的。

另外一个方面，我们通常来判别稳定性的简单判据是：

若传输函数  $H(s)$  的全部极点位于  $s$  平面的左半平面（不包括虚轴），即所有的极点都有负实部，那么系统是稳定的。

### 2. 无源性 (Passivity)

无源系统表示一个系统无法自己产生能量，而可以从其他的激励源吸收能量。无源性是需要满足的一个重要特性，因为稳定但非无源的宏模型当和其他稳定、甚至无源的负载连接的时候仍然可以产生不稳定的系统。模型降阶的主要对象是互连线网络，通常都是由 RLC 组成的，因此是无源系统。判断的规则是如果用无源网络端口上的导纳矩阵来表示，降阶系统无源的充分必要条件是

- 1) 对于所有的复数  $s$ ，都有  $Y(s^*) = Y^*(s)$ ，\*表示共轭。
- 2)  $Y(s)$  对于所有的满足  $\text{Re}(s) > 0$  的复数  $s$  和所有的复向量  $z$  都有

$$\text{Re}(z^H Y(s) z) \geq 0$$

为了体现无源性的重要意义，我们考虑一个有损传输线，由 40 个集总 RLC 段的模型表示。模型的降阶算法使用 PVL [2] 和 PRIMA (5 极点)。虽然 Pade 近似得到的所有极点都是稳定的（负实部），但整个系统却是不稳定的。而 PRIMA 的结果和真实结果十分吻合。



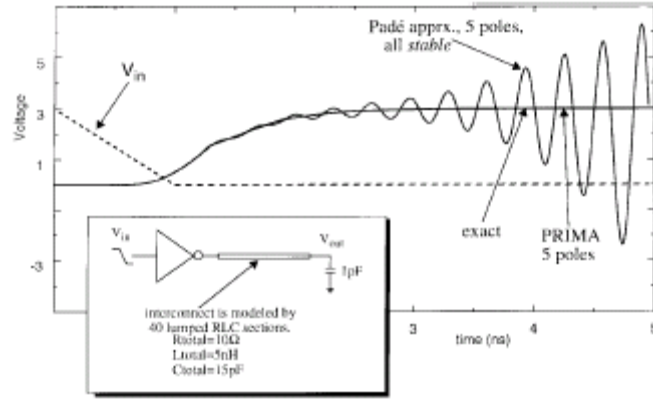


图 15 稳定但非无源的宏模型导致电路仿真过程发生震荡

### 2.2.2 算法推导

对于电路的状态方程，令  $A = -G^{-1}C$   $R = G^{-1}b$  我们可以化为如下形式：

$$\begin{aligned} A\dot{x} &= x - Ru \\ y &= L^T x \end{aligned} \quad (25)$$

这样系统的导纳矩阵变为

$$Y(s) = L^T (I_n - sA)^{-1} R \quad (26)$$

通过使用 Block Arnoldi 算法，我们得到下式

$$\begin{aligned} \text{colsp}(X) &= Kr \left( A, R, \begin{bmatrix} q \\ N \end{bmatrix} \right) \\ X^T AX &= H_q \\ X^T X &= I_q \end{aligned} \quad (27)$$

Block Arnoldi 算法的作用是将  $A$  矩阵化为上 Hessenberg 矩阵，由于上 Hessenberg 阵的形式特殊，在求解(27)式的过程中能够大大减少矩阵求逆的运算量，从而加快仿真速度。令  $x = Xz_q$ ，我们得到

$$\begin{aligned} H_q \dot{z}_q &= z_q - X^T R u_p \\ i_p &= L^T X z_q \end{aligned} \quad (28)$$

而这时的传输函数表达式中均为低阶的矩阵，可以直接求解

$$Y(s) = L^T X (I_q - sH_q)^{-1} X^T R \quad (29)$$

PRIMA 算法的另一个创新是它是针对多端口电路的，而不像 AWE 仅仅针对双端口。下图是多端口的网络模型：

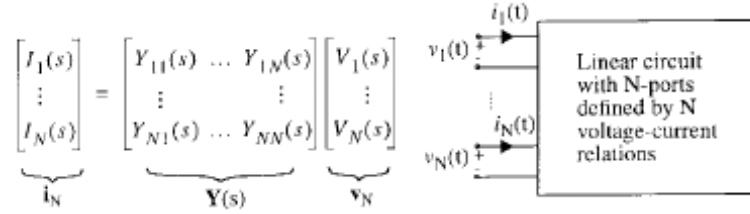


图 16 多端口网络模型及导纳矩阵表示

对于多端口的导纳矩阵求解的过程是逐个求出其中每个项  $Y_{ij} (1 \leq i, j \leq N)$  的值，然后再组成多端口导纳矩阵。PRIMA 算法通过 block Arnoldi 算法中的正交过程求出矩阵  $X$  满足：

$$\begin{aligned} \text{colsp}(X) &= \text{Kr}(A, R, q) \\ X^T X &= I_q \\ X^T A X &= H \end{aligned} \quad (30)$$

并且 PRIMA 使用矩阵  $X$  将 MNA 算法得到的电路状态方程中的  $C$ 、 $B$ 、 $G$ 、 $L$  矩阵进行变换，得到

$$\begin{aligned} \hat{C} &= X^T C X & \hat{G} &= X^T G X \\ \hat{B} &= X^T B & \hat{L} &= X^T L \end{aligned} \quad (31)$$

这是的  $\hat{C}, \hat{G}, \hat{B}, \hat{L}$  矩阵均为  $q$  阶小于原来的  $N$  阶，此时应用 PRIMA 算法得到的降阶模型同时还保持了无源性，稳定性以及  $\left\lfloor \frac{q}{N} \right\rfloor$  阶矩匹配。

下面我们将列举一个使用 PRIMA 算法进行模型降阶的例子：

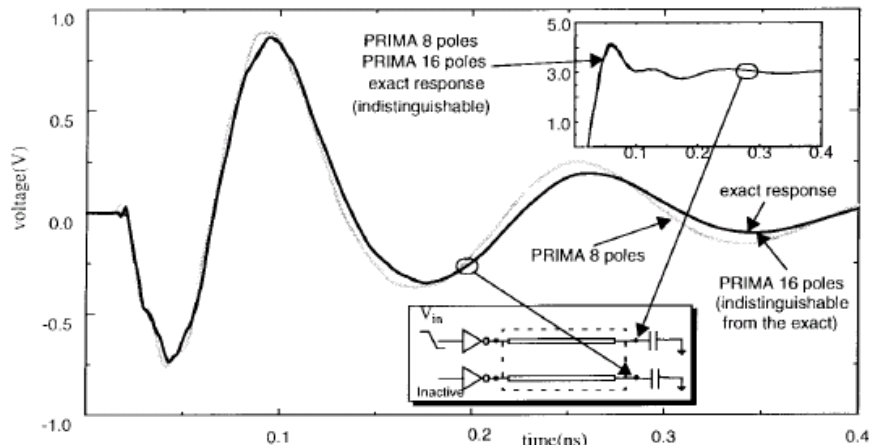


图 17 PRIMA 算法应用举例

可以看出在这种情况下，PRIMA 算法能够很好地对于原电路进行近似。

### 2.3 无源和互易的模型降阶算法 (SPRIM)

上面提到的 PRIMA 算法虽然能够保证降阶模型的无源性，稳定性及有比较高的矩匹配阶数，但是我们也看到 PRIMA 算法在变换过程中得到的  $\hat{C}, \hat{G}, \hat{B}, \hat{L}$  并没有保持互易性及可分块性，而这些都是实际电路很好的性质，所以使用 PRIMA 进行降阶的电路难以根据其数据恢复为近似的实际电路进行仿真分析。提出了 PVL[5]，MPVL[2]，SyPVL[27]，SyMPVL[28] 的 Roland W. Freund 在 2004 年提出了 SPRIM[9] 算法，在保证稳定性，无源性的基础上同时保持了降阶模型的互易性，使得对于模型降阶的研究前进了一大步。

我们先来回顾一下 PRIMA 算法，在求出了矩阵  $X$  满足(30)式后，PRIMA 算法直接将  $X$  矩阵投影到了原来的矩阵  $C$ 、 $B$ 、 $G$ 、 $L$  上而得到了(31)式中所示的新的状态矩阵。但是原来的  $C$ 、 $B$ 、 $G$ 、 $L$  矩阵均是分块矩阵，在变换之后便消失了这种特性，所以得到的新的状态矩阵不能被看成是实际电路的表示。而 SPRIM 算法的创新点也正好在这里，SPRIM 算法在求得  $X$  矩阵后将  $X$  矩阵分块，而分块矩阵的维数正好对应了原来  $C$ 、 $B$ 、 $G$ 、 $L$  矩阵中的维数，见(32)式。

$$G = \begin{bmatrix} E_g^T G E_g & E_l^T \\ E_l^T & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} E_c^T C E_c & 0 \\ 0 & L \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} E_i^T \\ 0 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

在这里 SPRIM 算法构造了一个新的矩阵  $\hat{X} = \begin{bmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{bmatrix}$ ，这样将  $\hat{X}$  矩阵按照 PRIMA 算法中投影到  $C$ 、 $B$ 、 $G$ 、 $L$  矩阵后，新生成的  $\hat{C}, \hat{G}, \hat{B}, \hat{L}$  矩阵仍然具备分块形和正定性。并且，矩阵  $X$  和矩阵  $\hat{X}$  满足：

$$K_n(A, R) = \text{span}(X) \subseteq \text{span}(\hat{X}) \quad (33)$$

满足了上面这个条件 SPRIM 算法所生成的降阶模型将会满足由 PRIMA 算法所生成的降阶模型的全部性质，并且经过证明 SPRIM 算法能够匹配原电路的  $2q$  阶矩，这个数值超过了 PRIMA 算法所匹配的  $\left\lfloor \frac{q}{N} \right\rfloor$  阶矩。下面将列举使用 SPRIM 进行模型降解与使用 PRIMA 进行模型降解的结果比较：

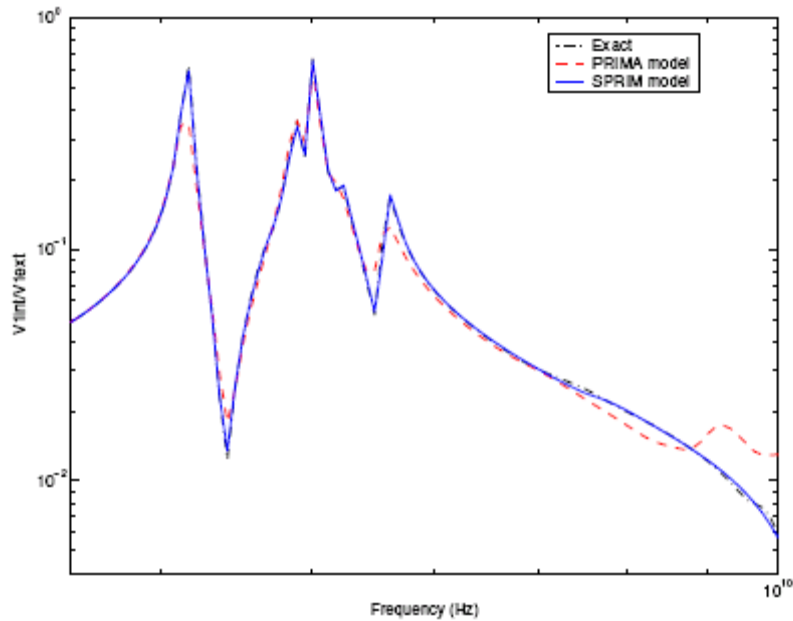


图 18 PEEC 模型测试结果

这个 PEEC 模型[26]包含了 2100 个电容，172 个电感，6990 个互感，和一个电压源。该模型一直被用来验证模型降解算法的准确性。可以看出 SPRIM 模型与实际电路相应吻合得非常好，这得益于 SPRIM 算法能够匹配原电路的  $2q$  阶矩，而不难看出应用 PRIMA 算法所得到的相应曲线在高频部分与实际电路的相应曲线有不小的偏差。

## 2.4 基于区间限定的统计学建模算法（Interval-Valued）

当集成电路的特征尺寸降低到了 90nm 以下，进入了深亚微米设计阶段之后，很多原来不需要过多考虑的因素如信号完整性，线延迟，时钟收敛，元件特征参数变化现在都必须给予足够的重视。不断缩小的特征尺寸意味着现在所有的重要的设计参数都不是固定不变的，而是满足统计学上的某种分布特征。摆在我们面前的新问题是能够在特征参数变化的条件下准确分析电器元件，互连线，和版图设计的特性。这个问题对于模型降阶技术来说，就是如何来分析一个状态矩阵中每个元素都是变量的降阶问题。对于电阻，电感，电容以及对整个电路进行一个基于统计理论的建模是一项新的研究课题。这个领域最基本的分析方法是 Monte Carlo 取样分析法，它很直接，通用，并且很准确，但是，就像传统的 spice 分析电路的方法一样，Monte Carlo 方法的复杂度很高，仿真速度慢，无法适应与大规模集成电路的

需求。另一方面，传统的分析参数变化的方法是区间法，即将每个参数看成一个定值加上一个它变化的区间，但是这样的分析方法一直没有被广泛使用，因为它在计算的过程中会导致参数大规模地增加，它只适用于分析很简单的电路。

### 2.4.1 参数变化下的电路模型

James D.Ma[30]提出了一种新的基于限定区间的统计学降阶模型分析方法，并且将它应用到了经典的 AWE 算法和 PRIMA 算法上。该算法的关键之处在于：

它使用了前面提到的 RICE 算法来求解电路的矩，从而避免了由于参数变化导致使用 Laplace 变换求解矩困难。

在求解的过程中，并不是在每一步都考虑参数的变化。当原电路模型被化简为低阶模型后从原来的限定区间法转到使用 Monte Carlo 采样分析模型，在保证速度的同时也提高了精确度，在它们之间作了一个平衡。

该算法对于参数变化情形下的电阻，电容，电感表述如下：

$$\begin{aligned}
 R_i &= R_{i,0} + \sum_{j=1}^l \Delta R_{i,j} \varepsilon_j + \sum_{j=l+1}^m \Delta R_{i,j} \varepsilon_j + \sum_{j=m+1}^n \Delta R_{i,j} \varepsilon_j \\
 C_i &= C_{i,0} + \sum_{j=1}^l \Delta C_{i,j} \varepsilon_j + \sum_{j=l+1}^m \Delta C_{i,j} \varepsilon_j - \sum_{j=m+1}^n \Delta C_{i,j} \varepsilon_j \\
 L_i &= L_{i,0} + \sum_{j=1}^l \Delta L_{i,j} \varepsilon_j - \sum_{j=l+1}^m \Delta L_{i,j} \varepsilon_j - \sum_{j=m+1}^n \Delta L_{i,j} \varepsilon_j
 \end{aligned} \tag{34}$$

这里  $R_{i,0}, C_{i,0}, L_{i,0}$  为该电阻，电容，电感的标准值， $\varepsilon_i (1 \leq i \leq n)$  代表彼此独立的，可以引起电阻，电容，电感变化的参量，而  $\Delta R_{i,j}, \Delta C_{i,j}, \Delta L_{i,j}$  代表每个  $\varepsilon_i$  能够引起该电阻，电容，电感变化的范围。这些表达式可以体现出模型中影响全局所有电阻，电容，电感变化的量  $\varepsilon_i (1 \leq i \leq n)$  和局部单个电阻，电容，电感变化的关系。

### 2.4.2 基于区间分析的 AWE 和 PRIMA 算法

在 2.4.1 节中介绍了这篇论文对于 R, L, C 使用区间参数表示的形式，对于论文的主题部分，作者使用的新算法基础为两种经典的算法 AWE 和 PRIMA，并且在其中加入了对于基本 R, L, C 参数为区间形式的分析。对于区间分析来说，现在已经广泛地运用到图像处理算法方面，CMU 大学的 Clarie Fang Fang[34]在其博士论文中大量提到了关于区间分析的算法和改进，并且她也开发了基于 C++ 的区间算法的

库，而 James D Ma 在这篇论文中所使用的就是这个库。接下来我们将分别介绍两种算法的具体实现，首先是 Interval-Valued AWE 算法，该论文提出了两者改进的方式，图 19 所示的是一种基本的区间分析 AWE 算法，可以看出与我们之前介绍的传统的 AWE 算法相比，Interval-Valued AWE 也是首先通过 MNA 算法得到电路的状态方程，只是这些方程中的  $R$ ,  $L$ ,  $C$  是随参数变化的，所以这些状态方程中的系数矩阵  $G$ ,  $C$ ,  $B$ ,  $L$  都是基于区间表示的矩阵。随后使用基于区间运算库的 LU 分解来求得电路的矩，通过这些矩建立 AWE 中的迭代求解矩阵，之后得到参数是区间形式的关于  $p$  的高次方程，最后得到降阶系统的区间形式的零极点，由于我们可以假设  $R$ ,  $L$ ,  $C$  的参数变化是基于一种统计规律的，所以在求得区间形式的零极点后可以采用蒙特卡罗取样对于每一个取样都计算这种形式下模型对于输入信号的延迟。这样当蒙特卡罗取样数很大时，我们能够得到一个  $R$ ,  $L$ ,  $C$  参数变化情况下的系统延迟的统计规律表示。

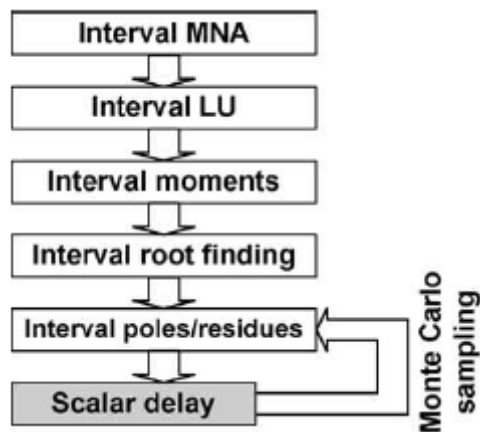


图 19 基本的区间分析 AWE 算法

图 20 中所示的是另外一种被称为快速区间分析 AWE 算法，可以看出这两者算法的区别就是蒙特卡罗采样在算法中使用的时机。第二种算法中应用了基于区间的 RICE 算法，这样求矩要比使用区间库函数进行计算求矩快，并且第二种算法在得到了矩后就马上使用蒙特卡罗采样，这样在后续的计算过程中就不需要使用区间计算，而是使用确定值计算，这样要比第一种算法中一直使用区间库函数计算快。

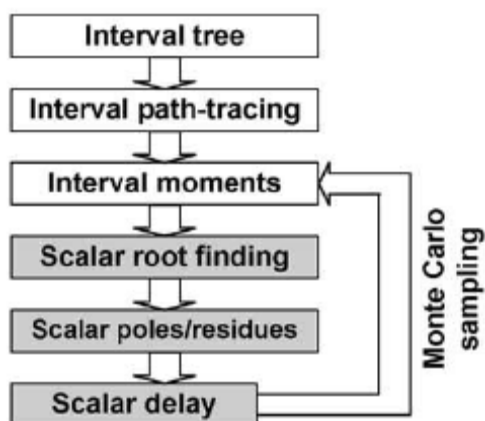


图 20 快速的基于区间分析的 AWE 算法

与此类似，图 21 和图 22 中所示的是普通的基于区间分析的 PRIMA 算法和快速的基于区间分析的 PRIMA 算法。与前面提到 AWE 算法相同，这两种算法的区别也是采用蒙特卡罗算法分析的时机不同。

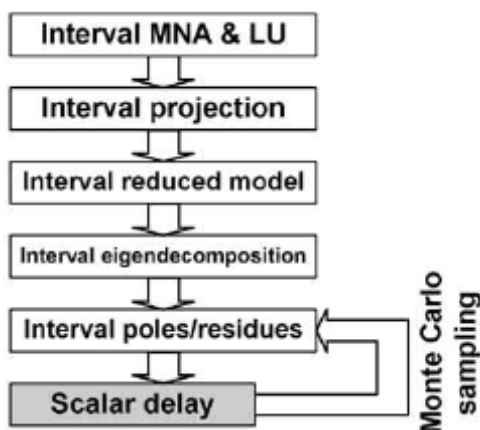


图 21 基本的基于区间分析的 PRIMA 算法

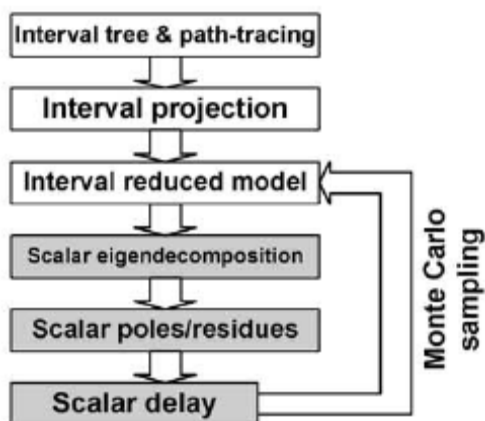


图 22 快速的基于区间分析的 PRIMA 算法

接下来我们来看看这些算法之间的比较,首先图 23 中所示的是两种基于区间分析的 AWE 算法的结果比较:

1 global/local variation	2 number of $\varepsilon$	3 MC-AWE			6 starAWE			9 error		11 run time speed-up
		4 mean (ps)	4 std (ps)	5 run time (s)	6 mean (ps)	7 std (ps)	8 run time (s)	9 mean	10 std	
<b>design1</b>										
20% / 10%	6	1313.2	184.8	196	1347.8	189.8	19	2.6%	2.7%	10
	11	1316.6	185.3	189	1347.2	189.7	18	2.3%	2.4%	11
	21	1314.5	185.0	185	1347.8	189.8	18	2.5%	2.6%	10
10% / 20%	6	1343.1	189.0	197	1346.6	189.6	18	0.3%	0.3%	11
	11	1350.0	190.0	185	1350.4	189.3	17	0.0%	0.4%	11
	21	1352.5	190.3	202	1354.0	189.8	20	0.1%	0.3%	10
5% / 30%	6	1345.3	189.3	199	1352.0	190.3	19	0.5%	0.5%	10
	11	1352.1	190.2	193	1348.8	189.9	18	0.2%	0.2%	11
	21	1358.1	191.1	191	1357.9	190.4	20	0.0%	0.4%	10
<b>design2</b>										
20% / 10%	6	847.4	119.3	302	879.3	123.2	28	3.8%	3.3%	11
	10	845.1	118.9	305	875.0	123.2	29	3.5%	3.6%	11
	19	845.2	118.9	297	878.0	123.6	31	3.9%	4.0%	10
10% / 20%	6	864.1	121.6	304	878.6	123.6	27	1.7%	1.6%	11
	10	866.8	122.0	299	866.3	121.9	27	0.1%	0.1%	11
	19	866.1	121.9	292	870.8	122.5	26	0.5%	0.5%	11
5% / 30%	6	864.1	121.6	301	892.9	125.6	28	3.3%	3.3%	11
	10	869.2	122.3	298	892.5	125.6	27	2.7%	2.7%	11
	19	875.1	123.1	297	867.9	122.1	29	0.8%	0.8%	10

表 2 两种基于区间分析 AWE 算法的比较

可以看出第二种算法在仅仅损失很少精度的情况下比第一种算法快了 10 倍左右。下图是采用区间限定统计学分析的 PRIMA 算法与采用 Monte Carlo 分析的 PRIMA 算法的结果比较:



global/local variation	number of $\epsilon$	MC-PRIMA			statPRIMA			error		run time speed-up
		mean (ps)	std (ps)	run time (s)	mean (ps)	std (ps)	run time (s)	mean	std	
design1										
20% / 10%	6	1307.3	184.0	184	1336.5	188.1	17	2.2%	2.2%	11
	11	1310.3	184.4	178	1348.1	190.1	18	2.9%	3.1%	10
	21	1312.3	184.7	176	1348.6	190.2	17	2.8%	3.0%	10
10% / 20%	6	1269.9	178.7	189	1338.1	188.6	16	5.4%	5.5%	12
	11	1283.7	180.7	175	1341.8	189.2	17	4.5%	4.7%	10
	21	1291.3	181.7	184	1340.5	189.0	19	3.8%	4.0%	10
5% / 30%	6	1290.3	185.1	177	1339.1	188.5	18	3.8%	1.8%	10
	11	1307.1	179.9	180	1298.2	182.3	16	0.7%	1.3%	11
	21	1316.8	181.3	179	1337.0	188.2	17	1.5%	3.8%	11
design2										
20% / 10%	6	845.9	119.0	269	869.9	122.3	25	2.8%	2.8%	11
	10	845.1	118.9	265	870.7	122.6	25	3.0%	3.1%	11
	19	847.1	119.2	267	871.6	122.7	24	2.9%	2.9%	11
10% / 20%	6	863.5	121.5	254	872.4	122.8	22	1.0%	1.1%	12
	10	870.2	122.5	279	861.5	121.2	27	1.0%	1.1%	10
	19	866.5	121.9	260	845.7	119.0	24	2.4%	2.4%	11
5% / 30%	6	864.2	121.6	262	877.0	123.4	23	1.5%	1.5%	11
	10	865.1	121.7	256	874.3	123.0	26	1.1%	1.1%	10
	19	867.8	122.1	263	852.2	120.0	22	1.8%	1.7%	12

表 3 两种基于区间分析 PRIMA 算法的比较

可以从数据看出, statPRIMA 相对于 MC-PRIMA 速度提高了 10 倍, 而仅仅产生了不到 5% 的误差。虽然该算法仅仅是使用区间分析参数变化模型降阶的一种尝试, 但是我们可以看到它取得了比较好的结果, 还有继续发展的余地。

## 2.5 符号化模型降阶方法 (SMOR)

经过很长时间的发展, 对于线形系统的模型降阶方法已经逐渐变得成熟, 所以研究人员现在将更多的精力投入到了相对还不成熟的对于参数变化的模型降阶分析中。

### 2.5.1 符号化仿真分析的物理表述

Guoyong Shi[32]提出了一种符号化仿真的方法, 它产生的背景是在分析一个大规模的集成电路的过程中, 我们需要对一些关键器件进行反复扫描分析, 如果我们把这些器件的参数符号化, 并且将其它数值固定的部分所对应的模型进行降解分析, 这样就能在保证一定精度的情况下对于电路进行快速的扫描分析。下面是一个 SMOR 的基本例子, 在下图的网络中, 我们仅仅将其中的 R, L, C 原件作为符号化分析的参数, 而其它的部分作为整体的网络进行分析。

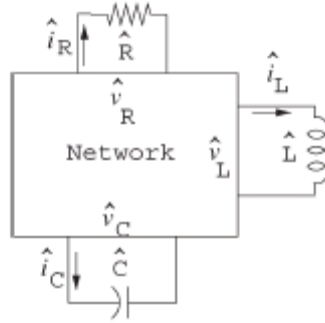


图 23 网络的符号化分析

我们将电路的 MNA 方程写成

$$\begin{bmatrix} \bar{C} & \\ & \hat{D} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \hat{x} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{G} & E \\ -E^T & \hat{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (35)$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{F} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

其中

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ \hat{i}_C \end{bmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{bmatrix} \hat{v}_C \\ \hat{i}_L \\ \hat{i}_R \end{bmatrix}$$

而我们令  $\bar{x} = Vz$  得到

$$\begin{bmatrix} V^T \bar{C} V & \\ & \hat{D} \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} z \\ \hat{x} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} V^T \bar{G} V & V^T E \\ -E^T V & \hat{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (36)$$

$$y = \begin{bmatrix} \bar{F} V & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

这说明可以对于原状态方程进行两边同乘矩阵  $\begin{bmatrix} V & \\ & I_3 \end{bmatrix}$  来进行相合变换得到降阶后的状态方程, 这说明 SMOR 从整个网络中提取出个别器件进行符号化仿真的方法是可行的。

### 2.5.2 二重矩匹配

另外, 该论文还提出了一个二重矩匹配的方法, 对于形如  $K_q(G_0^{-1}C_0, G_0^{-1}B_0)$  所

生成的 Krylov 子空间进行的是关于  $s=0$  处的矩匹配，而形如  $K_q(C_0^{-1}G_0, C_0^{-1}B_0)$  所生成的 Krylov 子空间进行的是关于  $s=\infty$  处的矩匹配，这样可以使降阶的系统在时域和频域都能够和原系统很好匹配。

下面是一个 SMOR 测试用例：

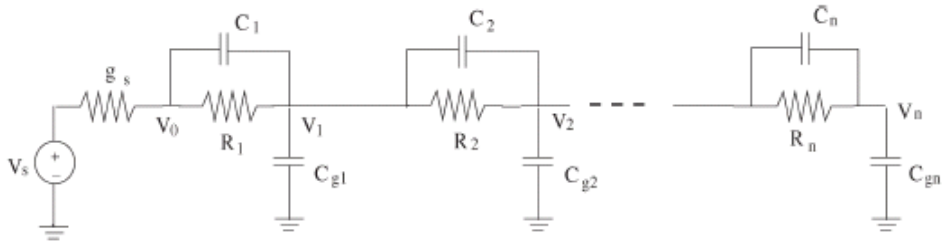


图 24 R,L,C 阶梯电路

使用 SMOR 算法计算结果如下：

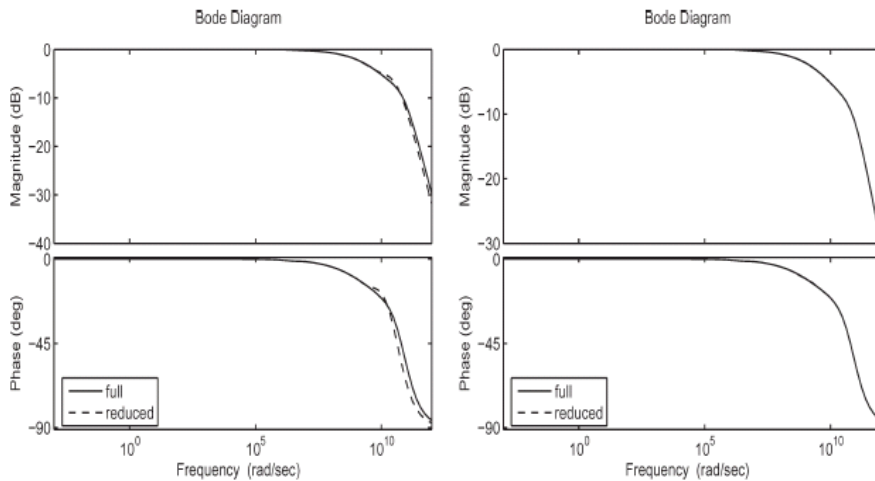


图 25 RLC 电路频域仿真结果

从中不难看出当仅使用在  $s=0$  处的矩匹配时，降阶后的模型仿真结果与原来有比较大的误差，而如果使用二重矩匹配，就能使降阶模型与原模型很好地吻合。

下面是对于该测试例子进行参数化模型降阶的分析结果，我们指定原电路的参数被扰动，服从 50% 的随机变化。可以看出使用 SMOR 的方法能够比较好地分析参数变化对于电路仿真结果变化的影响。

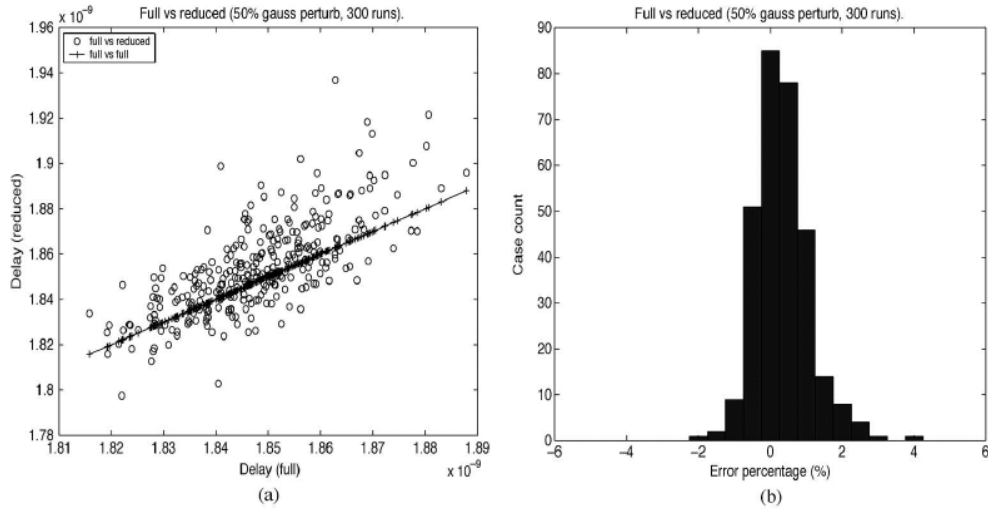


图 26 参数变化情况下 SMOR 算法的仿真结果

## 2.6 参数变化模型降阶方法在互连线分析中的应用 (Interpolation Method)

Guoyong Shi[35]提出了一种基于插值的互连线建模的模型降阶算法,能够很好地解决参数变化情况下的模型降阶问题。这篇文章中对于基于矩阵投影的模型降阶方法进行了一个概述如下:

对于如下所示模型

$$\begin{aligned} C \frac{dx}{dt} + Gx &= Fu \\ y &= Lx \end{aligned} \quad (37)$$

它的传输函数是

$$H(s) = L(Cs + G)^{-1} F \quad (38)$$

通过左乘  $W$  矩阵,右乘  $V$  矩阵,使得  $W^T V$  矩阵是可逆的,这样我们得到新的系数矩阵是

$$\hat{C} = W^T C V, \quad \hat{G} = W^T G V, \quad \hat{F} = W^T F, \quad \hat{L} = L V$$

对于  $W$  矩阵与  $V$  矩阵的选取是通过一些基本算法中提到的构建 Krylov 空间的方法得到的,当  $W=V$  的情况下叫做全等变换。

在很多之前的应用过程中，模型参数都在一个固定范围内变化，在这种情况下矩阵投影是一个比较稳定健壮的矩阵变换方法。

### 2.6.1 离散时间域上的矩匹配

这篇论文中提出的另外一个方法是叫做离散时间域上的矩匹配，它是通过对于传输函数在固定点展开实现的

$$\begin{aligned} H(s) &= L(Cs + G)^{-1} F = L[C(s - s_0) + (Cs_0 + G)]^{-1} F \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} LA^i B (s - s_0)^i \end{aligned} \quad (39)$$

其中

$$A = -(Cs_0 + G)^{-1} C, \quad B = (Cs_0 + G)^{-1} F$$

这种展开的好处在于在固定点展开的传输函数至少能够在该固定频率上匹配原传输函数，为了匹配原传输函数我们提出如下 Krylov 空间

$$\left( L, (Cs_0 + G)^{-1} C, (Cs_0 + G)^{-1} F \right)$$

可以使用 Lanczos[5]或者 Arnoldi[29]算法来实现这种情况。对于  $q$  阶的 Lanczos 算法，我们得到降阶系统模型的状态方程是

$$\begin{aligned} T_q \frac{d\xi}{dt} + (I - \gamma T_q) \xi &= e_1 u \\ y &= (l^T b) e_1^T \xi \end{aligned} \quad (40)$$

它的传输函数是

$$\widehat{H}(s) = (l^T b) e_1^T [T_q (s - \gamma) + I]^{-1} e_1 \quad (41)$$

其中  $(l^T b)$  是一个标量，矩阵  $T_q$  是一个  $q \times q$  阶三对角矩阵。从而，从插值的角度来看，决定一个降解后电路状态方程共有 1 个标量，及  $T_q$  中的  $3q-2$  个不为 0 的参数。所以，我们可以用一个  $3q-1$  维的向量来表示每次降阶后的状态方程。

### 2.6.2 Lagrange 插值法在模型降阶中的应用

我们了解函数插值的方法有很多，其中 Lagrange 插值法对于精确度和复杂度来说，都是一个不错的选择。我们选择  $p_i (i=1, 2, \dots, N)$  作为基本点来求函数在取新值

$p$  下的结果。其中  $p \in [p_1, p_N]$ ，Lagrange 的基本插值项定义如下

$$\delta_i(p) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (p - p_j) / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (p_i - p_j) \quad (42)$$

而函数在点  $p$  的值可以表示为

$$v(p) = \sum_{i=1}^N \delta_i(p) v_i \quad (43)$$

对于多参数的情况下，我们可以对于基本的 Lagrange 进行扩展来解决，假设我们有  $K$  个参数，定义为  $\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_K)$ 。并且我们定义  $[p_k^l, p_k^r]$  为包含第  $k$  个数  $p_k$  的最小区间， $\{(p_1^t, \dots, p_k^t) : t = l \text{ or } r\}$  为复参数组， $v_{(p_1^t, \dots, p_k^t)}$  为在各个样本点的值，则对于函数在向量  $\vec{p}$  处的值，我们可以使用 Lagrange 插值表达式表示为

$$v(\vec{p}) = \sum_{(p_1^t, \dots, p_k^t)} \left[ \prod_{j=1}^K \delta([p_j^l, p_j^r], p_j^t, p_j) \right] v_{(p_1^t, \dots, p_k^t)} \quad (44)$$

其中函数  $\delta([a, b], p, x)$  定义如下

$$\delta([a, b], a, x) = \frac{x - b}{a - b} \quad \text{and} \quad \delta([a, b], b, x) = \frac{x - a}{b - a}$$

图 29 中所示的是一个对于参数变化情况下耦合互连线建模的结果，可以看出 3 条由插值法得到的降阶模型频率响应曲线能够与原模型频率响应曲线很好匹配。

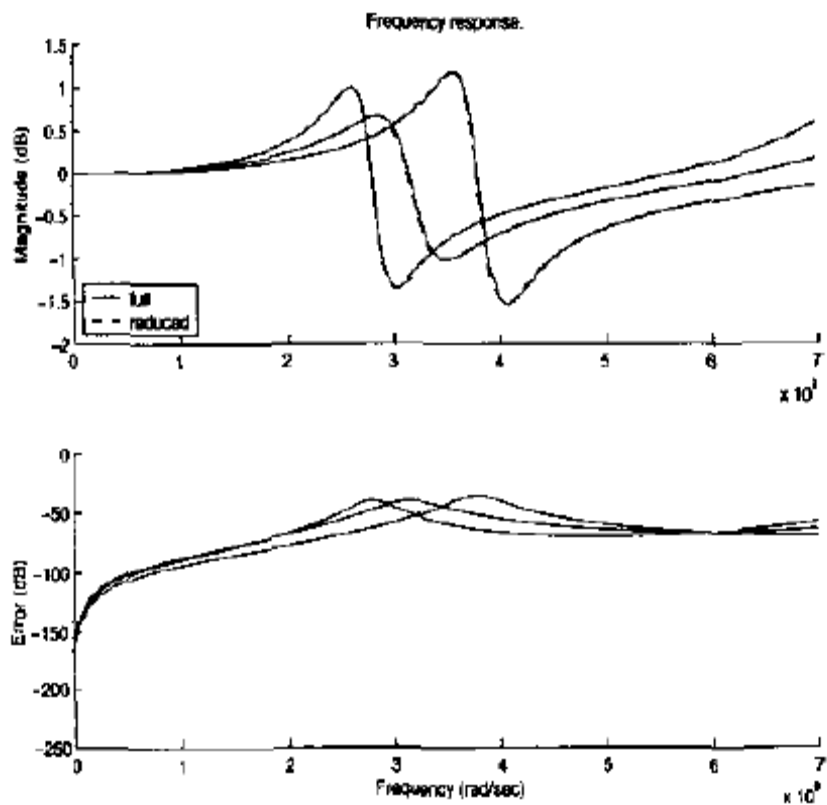


图 27 参数化模型降阶分析结果

### 3 基于可观测标准型的多端口模型降阶算法

模型降阶问题最初是来源于自动控制领域。在控制理论中解决线性系统问题往往是抽象成一个状态空间求解，然后用相应的算法求解这样的状态空间。电路的改进节点方程（MNA）实际上也可以看成是状态方程。传统的模型降阶算法，如 PRIMA, SPRIM 均是基于状态方程进行分析得，下面我们也将提出一种基于状态方程并且与控制领域中的可观测标准型联系模型降阶算法（Observability Canonical Form Recuction），简称为 OCFR 算法。

#### 3.1 系统状态方程

系统状态方程是一阶联立微分方程组，方程左边是各状态变量的一阶导数，而右边是状态变量和激励函数的线性组合。状态方程的建立有多种方法，直接法多用于计算机辅助网络分析设计，间接法可由系统的输入输出方程或者系统函数来建立状态变量方程。

系统状态方程一般总是可以表示成矢量矩阵的形式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (45)$$

而我们使用 MNA 算法得到的电路的状态方程一般是

$$\begin{cases} C \frac{dx}{dt} + Gx = Fu \\ y = Lx + Du \end{cases} \quad (46)$$

从方程的形式上可以看出，两种电路的状态方程十分相像，区别仅在于微分方程系数矩阵的位置一个在等号右边，一个在等号左边。需要指出的是这并没有本质区别，MNA 方程中的矩阵 C 如果可逆的话直接就可以得到相应的状态方程。对于一般不可逆的情况，总是可以通过适当的变量替换，消去一些冗余的节点电压或者支路电流，使左边的系数矩阵可逆，从而也能够转换成状态方程的形式。



### 3.2 系统的可观测性

系统的可观测性是指通过观测有限时间内的输出量，能否识别出系统初始状态的能力，也表示系统内部的状态的不同能否传播到系统输出的能力。如果原系统用状态方程表示，在给定输入后，能在有限时间 $(0, t_1)$ 内根据系统的输出唯一确定出系统的所有起始状态，则称系统完全可观测，若只能确定部分起始状态，则此系统不完全可观测。一个系统是否可观测的判据可以从定义求得：

对于一般电路的传输函数进行 Laplace 变换我们能够得到

$$Y(s) = Y_p(s) + Y_s(s) = C(sI - A)^{-1}u(0^-) + [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \quad (47)$$

时域的输出为

$$y(t) = Ce^{At}x(0^-) + [Ce^{At}B + D\delta(t)] * u(t) \quad (48)$$

而上述两种表达式中第一项是零输入响应，第二项是零状态响应。我们在分析的过程中可以假设  $u(t)=0$  用来简化分析过程，这样我们得到

$$y(t) = Ce^{At}x(0^-) \quad (49)$$

使用级数展开我们能得到

$$y(t) = C(a_0I + a_1A + \dots + a_{n-1}A^{n-1})u(0^-) \quad (50)$$

其中  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  是  $A$  矩阵特征方程的系数。

使用向量的形式表示我们可以得到

$$y(t) = [a_0 \quad a_1 \quad \dots \quad a_{n-1}] \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} u(0^-) \quad (51)$$

可以看出，输出  $y(t)$  是系统起始状态的线性组合，因此要唯一确定系统的所有起始状态  $u(0^-)$ ，即是要求矩阵

$$M = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

满秩，这便是系统完全可观测的条件。

前面我们介绍过 Krylov 子空间投影法，这里不难发现 Krylov 子空间的基与判别矩阵非常相似，这样的矩阵有个特点，当  $n$  变大时，新产生的向量会与原来的向量线性相关，这样当  $n$  比较大时，矩阵  $M$  是很难满足满秩可观测的。对于大多数电路来说，可观测性都非常低，这样可以理解为系统对于输出来说有很大的冗余度，我们可以抓住这个特点，在不改变输出的情况下降低系统计算过程中的阶数，这样可以大大加快计算的过程，这些正是模型降阶算法的目的和作用。

### 3.3 可观测标准型

对于一个系统，我们可以使用多个状态方程来表示，但是这些状态向量之间是相关的，每个状态方程都可以由其它状态方程通过线性变换得到。对于如下系统状态方程

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (52)$$

令  $z = Vx$

我们得到

$$\begin{cases} V^{-1} \frac{dz}{dt} = AV^{-1}z + Bu \\ y = CV^{-1}z + Du \end{cases} \quad (53)$$

为了化成标准的状态方程形式，对上式左乘  $V$  后得到

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = (VAV^{-1})z + (VB)u \\ y = (CV^{-1})z + Du \end{cases} \quad (54)$$

令

$$\begin{aligned} \hat{A} &= VAV^{-1}, \hat{B} = VB \\ \hat{C} &= CV^{-1}, \hat{D} = D \end{aligned}$$

就得到了一个在新的状态向量下的状态方程

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \hat{A}z + \hat{B}u \\ y = \hat{C}z + \hat{D}u \end{cases} \quad (55)$$

这里我们选取

$$V = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

通过证明我们可以得到

$$\hat{A} = VAV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ -m_0 & -m_1 & -m_2 & \cdots & -m_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = VB = \begin{bmatrix} CB \\ CAB \\ \vdots \\ CA^{n-1}B \end{bmatrix}, \hat{C} = CV^{-1} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]$$

其中  $m_0, m_1, \dots, m_{n-1}$  是矩阵  $A$  的特征方程的系数，这种形式称为可观测标准型。

以上这种形式是针对单输入单输出情况下的，针对多输入多输出情况，我们能够得到类似的可观测标准型为（假定为  $p$  输入  $p$  输出情况）

$$\hat{A} = VAV^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & I_p & & & \\ & 0 & I_p & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_p \\ -M_0 & -M_1 & -M_2 & \cdots & -M_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (56)$$

$$\hat{B} = VB = \begin{bmatrix} CB \\ CAB \\ \vdots \\ CA^{n-1}B \end{bmatrix}, \hat{C} = CV^{-1} = [I_p \ 0 \ 0 \ 0].$$

其中系数  $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$  为  $p \times p$  阶矩阵， $I_p$  为  $p \times p$  阶单位矩阵，例如系统为

2 输入 2 输出情况时

$$M_i = \begin{bmatrix} m_{i0} & m_{i1} \\ m_{i2} & m_{i3} \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

$$I_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.4 矩匹配

为了方便分析，我们排除掉前面状态方程中 D 矩阵的影响，假定系统的状态方程如下

$$\begin{cases} C \frac{dx}{dt} + Gx = Fu \\ y = Lx \end{cases}$$

这里有 3 种矩匹配的情况

1. 在  $s=0$  进行矩匹配

因为通常情况下 G 矩阵都是可逆的，这样原状态方程可以转化为

$$\begin{cases} G^{-1}C \frac{dx}{dt} = -x + G^{-1}Fu \\ y = Lx \end{cases}$$

令  $A = G^{-1}C, B = G^{-1}F$

我们得到

$$\begin{cases} A \frac{dx}{dt} = -x + Bu \\ y = Lx \end{cases}$$

则

$$H(s) = L(sA + I)^{-1} B = LB - LABs + LA^2Bs^2 - \dots \quad (57)$$

而通过 OCFR 算法降阶后系统的状态方程为

$$\begin{cases} A_q \frac{dx}{dt} = -x + B_q u \\ y = L_q x \end{cases}$$

则

$$H(s) = L_q (sA_q + I)^{-1} B_q = L_q B_q - L_q A_q B_q s + L_q A_q^2 B_q s^2 - \dots \quad (58)$$

这样为了匹配  $p$  阶矩，需要满足

$$LA^i B = L_q A_q^i B_q, \quad i = 0, 1, 2, \dots, p-1$$

2. 在  $s = \infty$  进行矩匹配

通常情况下  $C$  矩阵不可逆，但是前面已经提到过，我们可以通过适量的变量变化，消除冗余节点来使得  $C$  矩阵可逆。这样原状态方程可以转化为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -C^{-1}Gx + C^{-1}Fu \\ y = Lx \end{cases}$$

令  $A = C^{-1}G, B = C^{-1}F$

我们得到

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax + Bu \\ y = Lx \end{cases}$$

则传输函数为

$$H(s) = L(sI - A)^{-1} B = LBs^{-1} + LABs^{-2} + LA^2Bs^{-3} + \dots \quad (59)$$

而通过 OCFR 算法降阶后系统的状态方程为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_q x + B_q u \\ y = L_q x \end{cases}$$

则传输函数为

$$H(s) = L_q (sI - A_q)^{-1} B_q = L_q B_q s^{-1} + L_q A_q B_q s^{-2} + L_q A_q^2 B_q s^{-3} + \dots \quad (60)$$

这样为了匹配  $p$  阶矩，同样需要满足

$$LA^i B = L_q A_q^i B_q, \quad i = 0, 1, 2, \dots, p-1$$

3. 在  $s = s_0$  进行矩匹配

这种情况下是最一般的情况，我们可以选择合适的展开点  $s_0$  来进行矩匹配，这样会使原传输函数和新的传输函数在该频率点附近匹配最好。而前面提到的第一种

情况即是在  $s_0 = 0$  下的匹配，而将  $s_0$  的值取得很大便能接近第二种情况下  $s = \infty$  的效果。

将原状态方程的传输函数在  $s_0$  点展开我们得到

$$\begin{aligned} H(s) &= L(Cs + G)^{-1} F = L[C(s - s_0) + (Cs_0 + G)]^{-1} F \\ &= L[(Cs_0 + G)^{-1} C(s - s_0) + I]^{-1} (Cs_0 + G)^{-1} F \end{aligned} \quad (61)$$

$$\text{令 } A = (Cs_0 + G)^{-1} C, \quad B = (Cs_0 + G)^{-1} F$$

我们得到

$$H(s + s_0) = L(I + sA)^{-1} B = LB - LABs + LA^2Bs^2 - \dots \quad (62)$$

它所对应的状态方程为

$$\begin{cases} A \frac{dx}{dt} = -x + Bu \\ y = Lx \end{cases}$$

而通过 OCFR 算法降阶后系统的状态方程为

$$\begin{cases} A_q \frac{dx}{dt} = -x + B_q u \\ y = L_q x \end{cases}$$

则

$$H(s) = L_q (sA_q + I)^{-1} B_q = L_q B_q - L_q A_q B_q s + L_q A_q^2 B_q s^2 - \dots \quad (63)$$

这样为了匹配  $p$  阶矩，需要满足

$$LA^i B = L_q A_q^i B_q, \quad i = 0, 1, 2, \dots, p-1$$

### 3.5 OCFR 算法

OCFR(Observability Canonical Form Reduction)是一种基于可观测规范标准型的模型降阶算法。根据以上分析中电路的可观测性较弱的假设，我们提出基于可观测规范标准型的模型降阶算法 OCFR，并且我们模仿可观测标准型形式能够得到一个简化的系统模型表示。在矩匹配过程中我们介绍了 3 种不同形式的矩匹配变换，这

里我们选取第 3 种形式，也就是最一般的形式下的矩匹配，而其它两种形式下矩匹配的降阶算法均可以由该情况下的算法类推得到。

步骤：

1. 对于状态方程

$$\begin{cases} C \frac{dx}{dt} + Gx = Fu \\ y = Lx \end{cases}$$

经过变换  $A = (Cs_0 + G)^{-1}C, B = (Cs_0 + G)^{-1}F$ ，我们得到

$$\begin{cases} A \frac{dx}{dt} = -x + Bu \\ y = Lx \end{cases}$$

2. 使用 Block Arnoldi 算法计算 Krylov 子空间

$$K_q(A^T, L^T) = \text{span}[L^T, A^T L^T, \dots, A^{T(q-1)} L^T] \quad (64)$$

找到  $LA^q$  由  $LA^i (i=1, \dots, q-1)$  所线性表示的  $P \times P$  系数矩阵  $M_i (i=0, \dots, q-1)$  满

足  $LA^q \approx -M_0 L - M_1 LA - \dots - M_{q-1} LA^{(q-1)}$

3. 建立以以下矩阵为系数的电路状态方程

$$A_q = \begin{bmatrix} 0 & I_p & & & \\ & 0 & I_p & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_p \\ -M_0 & -M_1 & -M_2 & \dots & -M_{q-1} \end{bmatrix},$$

$$B_q = \begin{bmatrix} LB \\ LAB \\ \vdots \\ LA^{q-1}B \end{bmatrix},$$

$$L_q = [I_p \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

上述步骤的推导过程如下，类比于可观测标准型，选取  $W_q, V_q$  满足

$$W_q^T = \begin{bmatrix} L \\ LA \\ \vdots \\ LA^{q-1} \end{bmatrix}$$

且  $W_q^T V_q = I_{pq}$ ,  $x = V_q z$  原方程变换为

$$\begin{cases} W_q^T V_q \dot{z} = W_q^T A V_q z + W_q^T B u, \\ y = L V_q z, \end{cases}$$

得到新的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{z} = A_q z + B_q u, \\ y = L_q z, \end{cases}$$

其中

$$\begin{aligned} W_q^T A V_q &= A_q, W_q^T B = B_q \\ L_q &= L V_q \end{aligned}$$

#### 4. 验证新状态方程所表示电路的稳定性和无源性

由于新生成状态方程矩阵的特殊性，以及与传统可观测矩阵的联系，我们不难证明新系统可以匹配原系统的  $k$  阶矩  $\hat{m}_k = m_k (k = 0, 1, \dots, q-1)$ ，满足上面矩匹配部分的要求

$$\begin{aligned} \hat{m}_k &= L_q A_q^k B_q \\ &= \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & I_p & & & \\ 0 & 0 & \cdots & I_p & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & I_p \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} LB \\ LAB \\ \vdots \\ LA^{q-1}B \end{bmatrix} \\ &= LA^k B = m_k \end{aligned}$$



### 3.6 $M$ 和 $B_q$ 的计算

在计算过程中，我们通常不直接计算  $(A^i)^T L^T$  因为这样直接计算会过于复杂，并且不能保持整个计算过程的稳定性。通常我们使用 Block Arnoldi 算法构造 Krylov 空间  $K_q(A^T, L^T)$  来计算由矩阵  $W_q$  的列所生成的子空间：

Block Arnoldi 算法：

```

In :  $A^T, L^T, q$ 
Out :  $\widetilde{W}, V_{q+1}, H_q, H_{q+1,q}$ 
 $(V_1, R_{11}) = QR(L^T);$ 
for ( $j = 1; j \leq q; j++$ ) {
     $U_j = A^T V_j;$ 
    for ( $i = 1; i \leq j; i++$ ) {
         $H_{i,j} = V_i^T U_j;$ 
         $U_j = U_j - V_i H_{i,j};$ 
    }
     $(V_{j+1}, H_{j+1,j}) = QR(U_j);$ 
}
 $\widetilde{W} = [V_1 \ V_2 \ \cdots \ V_q];$ 
 $H_q = (H_{i,j}), i, j = 1, \dots, q;$ 

```

由于矩阵  $\widetilde{W}_q$  及  $W_q$  均能够用 Krylov 空间  $K_q(A^T, L^T)$  所表示，这就表示这两个矩阵的列向量存在线性相关的关系，所以我们能够找到新矩阵  $R_q$  满足

$$W_q = \widetilde{W}_q R_q$$

$$R_q = \begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & \cdots & R_{1,q-1} & R_{1,q} \\ & R_{2,2} & \cdots & R_{2,q-1} & R_{2,q} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & R_{q-1,q-1} & R_{q-1,q} \\ & & & & R_{q,q} \end{bmatrix} \quad (65)$$

其中矩阵  $R_q$  是上分块对角矩阵。

由于我们使用了 Block Arnoldi 算法，根据该算法的描述，我们能得到如下表达式

$$A \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} & \cdots & H_{1,q} \\ H_{2,1} & H_{2,2} & \cdots & H_{2,q} \\ & H_{3,2} & \cdots & H_{3,q} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & H_{q,q-1} & H_{q,q} \end{bmatrix} + V_{q+1} H_{q+1,q} E_q^T$$

$$= \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & \cdots & V_q \end{bmatrix} H_q + V_{q+1} H_{q+1,q} E_q^T$$

我们将矩阵  $R_q$  写成分块列矩阵  $\widetilde{R}_i (i=1, \dots, q)$  的形式，即

$$R_q = \begin{bmatrix} \widetilde{R}_1 & \widetilde{R}_2 & \cdots & \widetilde{R}_q \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{R}_{j+1} = H_q \widetilde{R}_j, \quad \text{for } j=1, \dots, q-1$$

我们容易得到

$$\widetilde{R}_1 = R_{1,1} E_1, \quad E_1 = \begin{bmatrix} I_p & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^T$$

接下去我们的目标变成如何求  $M$  矩阵，我们发现  $M$  矩阵可以由如下的式子求得

$$R_q M^T = -H_q \widetilde{R}_q \quad (66)$$

即求解

$$\begin{bmatrix} R_{1,1} & R_{1,2} & \cdots & R_{1,q-1} & R_{1,q} \\ & R_{2,2} & \cdots & R_{2,q-1} & R_{2,q} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & R_{q-1,q-1} & R_{q-1,q} \\ & & & & R_{q,q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0^T \\ M_1^T \\ \vdots \\ M_{q-1}^T \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} H_{1,1} & H_{1,2} & \cdots & H_{1,q} \\ H_{2,1} & H_{2,2} & \cdots & H_{2,q} \\ & H_{3,2} & \cdots & H_{3,q} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & H_{q,q-1} & H_{q,q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{1,q} \\ R_{2,q} \\ \vdots \\ R_{q-1,q} \\ R_{q,q} \end{bmatrix}$$

这里我们可以利用  $R_q$  矩阵是分块上三角矩阵来避免直接对于矩阵求逆进行计算，最后我们还需要计算  $B_q$  矩阵，表达式如下

$$B_q = W_q^T B = R_q^T \widetilde{W}_q^T B$$

### 3.7 差值法解决参数变化问题

算法介绍到这里，我们已经能够把最初的电路模型降阶为一个阶数比较低的电路模型了，但是我们之前提到，在集成电路制造特征尺寸不断缩小的今天，很多原来不需要过多考虑的因素如信号完整性，线延迟，时钟收敛，元件特征参数变化现在都必须给予足够的重视。不断缩小的特征尺寸意味着现在所有的重要的设计参数都不是固定不变的，而是满足统计学上的某种分布特征。摆在我们面前的新问题是能够在特征参数变化的条件下准确分析电器元件，互连线，和版图设计的特性。所以，在我的毕业设计研究过程中也考虑了在电路参数变化情况下的模型降阶问题。并且我们可以利用 OCFR 算法降阶后模型参数很简单的特性来进行分析。这里我们采用的思想是插值算法的思想来应对参数变化情况下的模型降阶问题。

对于前面提到的 PVL 算法，在求解单输入单输出的情况时，我们化简后的模型中有  $3q-1$  个参数，所以每次参数变化情况下模型降阶的结果可以用一个  $3q-1$  维的向量来表示，这样能够在取样过程中用很少的参数储存每次计算的结果。

OCFR 算法中提到降阶后的系统为

$$\begin{cases} A_q \frac{dx}{dt} = -x + B_q u \\ y = L_q x \end{cases}$$

其中

$$A_q = \begin{bmatrix} 0 & I_p & & & \\ & 0 & I_p & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & I_p \\ -M_0 & -M_1 & -M_2 & \cdots & -M_{q-1} \end{bmatrix},$$

$$B_q = \begin{bmatrix} LB \\ LAB \\ \vdots \\ LA^{q-1}B \end{bmatrix},$$

$$L_q = \begin{bmatrix} I_p & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

对于  $p$  输入  $p$  输出系统来说,  $M_i (i=0,1,\dots,q-1)$  均为  $p \times p$  矩阵, 而  $B_q$  为  $n \times p$  矩阵, 而对于  $L_q$  矩阵, 不同情况下状态方程化简得到是相同的情况, 所以我们每次对参数变化情况下的降阶系统只需储存  $A_q$  矩阵中的  $M_0, M_1, \dots, M_{q-1}$  矩阵及  $B_q$  矩阵即可, 这样对每个采样点得到的降阶矩阵只需用很少的项便能够存储。对于单输入单输出情况, 每次只需存储  $q+q=2q$  项, 而前面提到 PVL 算法每次降阶后需要存储  $3q-1$  个项来表示降阶的系统。这样我们的 OCFR 算法能够使用更少的项来表示降阶的系统, 并且这样也能够使后续的 Lagrange 算法计算速度更快得到结果。

当系统为单输入单输出情况下, 我们可以使用基本的 Lagrange 差值算法

$$v(p) = \sum_{i=1}^N \delta_i(p) v_i \quad (67)$$

其中

$$\delta_i(p) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (p - p_j) / \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (p_i - p_j)$$

而对于多输入多输出情况下, OCFR 算法每次可以使用维数为  $p \times p \times q + p \times q = pq(1+p)$  的向量来表示每次降阶的系统, 这里我们同样可以使用 Lagrange 差值算法求得新生成的向量所代表的状态方程。

## 4 实验与分析

### 4.1 OCFR 算法验证与分析

第一个例子是一个 2 输入 2 输出的多端口模型，它包含 3 条平行的互连线，每条互连线由 9 段 RLC 耦合模型组成，每段 RLC 的参数是  $R=5.3571\text{m}\Omega$ ,  $L=0.6138\text{nH}$ ,  $C=0.1420\text{pF}$ ,  $CC=0.0155\text{pF}$ ,  $CL=1\text{pF}$ ，其中  $CL$  是负载电容。我们考虑将电压源  $V_{s1}$  和  $V_{s2}$  作为输入电压，而我们来测量  $V_1$  端和  $V_2$  端的电压。

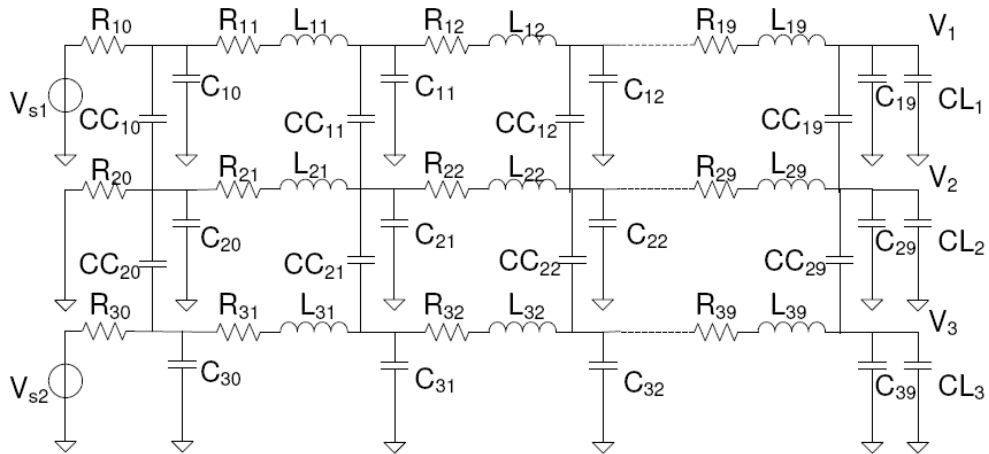


图 28 耦合互连线模型

使用 MNA 算法得到该电路模型的阶数是 89 阶，使用 OCFR 可以将电路模型的阶数降低，这里取降低到 16 阶。图 31 中表示的是传输函数矩阵  $H(s)$  中  $h_{12}(s)$  项的频率响应，从图中看出，降解后的传输函数与系统本身的传输函数吻合得很好。

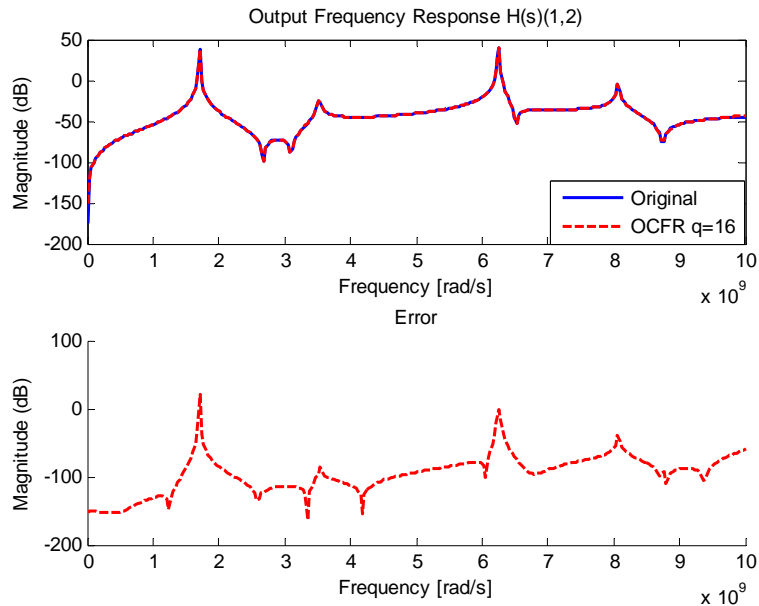
图 29  $H(s)(1,2)$ 项频率响应

图 32 中表示的是该降解模型的极点表示, 从图中可以看出, 所有的极点都在复平面的左半平面, 这里说明该降阶模型是稳定的。

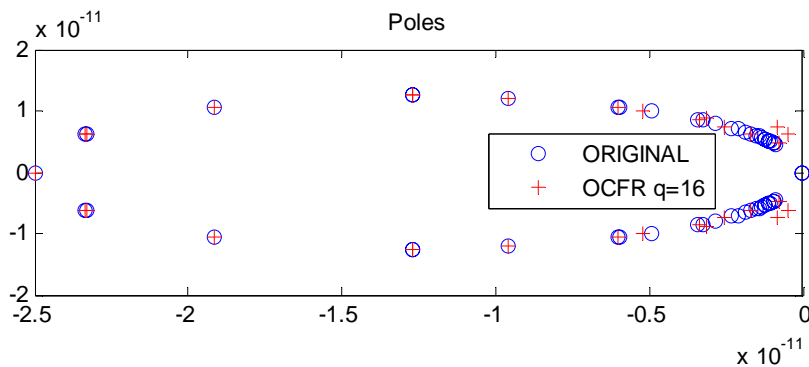
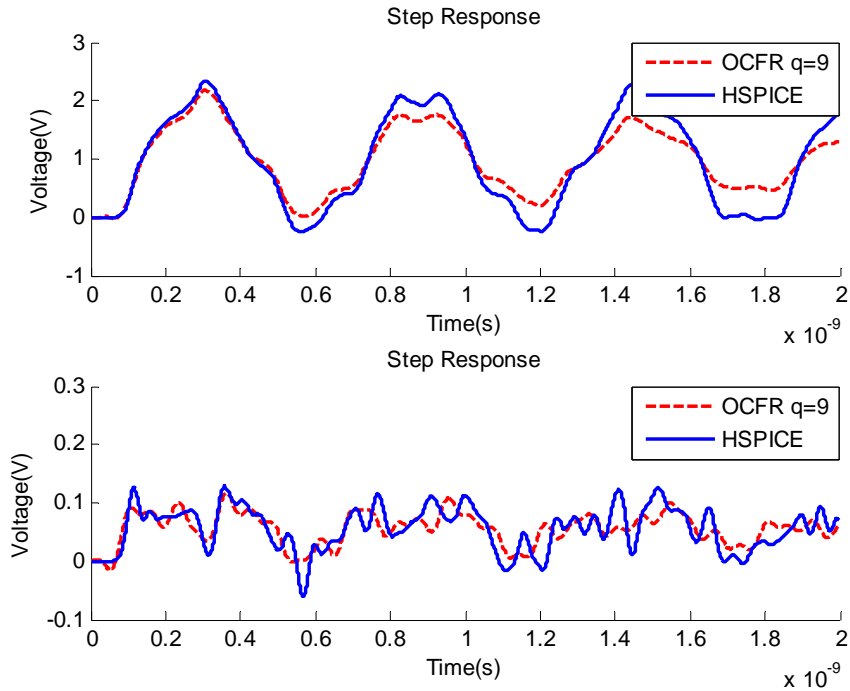


图 30 原模型极点及降阶模型极点表示

对于这三条导线的耦合效应, 我们还能够在时域上对其分析。图 33 表示了传输函数项  $h_{11}(s)$  的阶跃响应, 同时 Hspice 对于原电路的时域仿真结果也表示在该图中。对于这种情况, 我们所取得阶数是  $q=9$ , 可以看出降解后的模型也能够比较好地反映电路时域方面的响应。由于该电路模型电容的选择导致该电路的计算收敛比较慢, 所以在使用 matlab 计算的过程中, 阶跃响应的收敛也比较慢。

图 31 传输函数项  $h_{11}(s)$  及  $h_{12}(s)$  的阶跃响应

## 4.2 参数变化下 OCFR 算法与插值算法的结合

图 34 所示的是一个简单的 RLC 导线模型，我们将使用该模型来实现 OCFR 算法对于参数变化情况下的模型降阶，其中  $R=5.3571\text{m}\Omega$ ,  $L=0.6138\text{nH}$ ,  $C=0.1420\text{pF}$ ，我们选取电压源  $V_s$  作为输入，节点  $V_t$  作为输出。

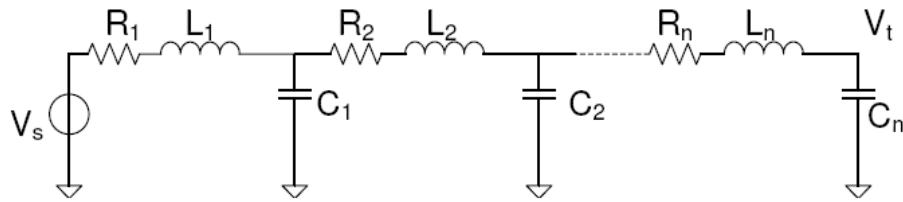


图 32 RLC 导线模型

我们接下来将考虑  $L$  的参数变化对于整个电路分析的影响。我们假设电导  $L$  数值变化的区间是  $[0.5L_0, 1.5L_0]$ ，其中  $L_0$  的值是  $L$  的标准值。我们在该区间中平均选取 20 个独立的  $L$  的值，并且每次都使用 OCFR 算法将矩阵阶数从 100 阶降阶到 15 阶。图 35 中所示是我们使用前面介绍过的插值算法得到的两个随机选取的  $L$  值

下的传输函数。

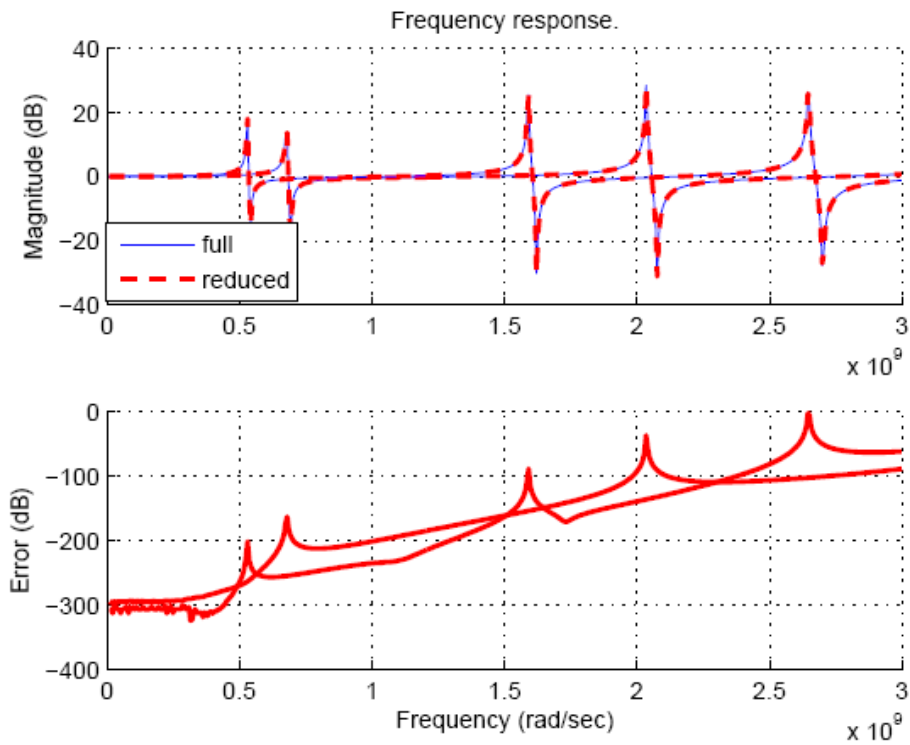


图 33 单一参数变化下的 OCFR 算法仿真结果

接下去我们将考虑  $R$ 、 $L$ 、 $C$  参数同时变化情况下的分析过程。我们对于  $R$  的取值区间范围 $[0.8R_0, 1.2R_0]$ 中平均取 6 个点， $L$  的取值区间范围 $[0.8L_0, 1.2L_0]$ 中平均取 6 个点， $C$  的取值区间范围 $[0.8C_0, 1.2C_0]$ 中平均取 4 个点。这样我们一共要采样  $6*6*4=144$  次，每个采样我们均使用 OCFR 算法取阶数为 8 将它们降阶。

图 36 中所示是使用插值法而得到的两个随机选取  $R$ 、 $L$ 、 $C$  数值的输出频率响应，可以看出插值法得到的结果与本身情况相比吻合得很好。



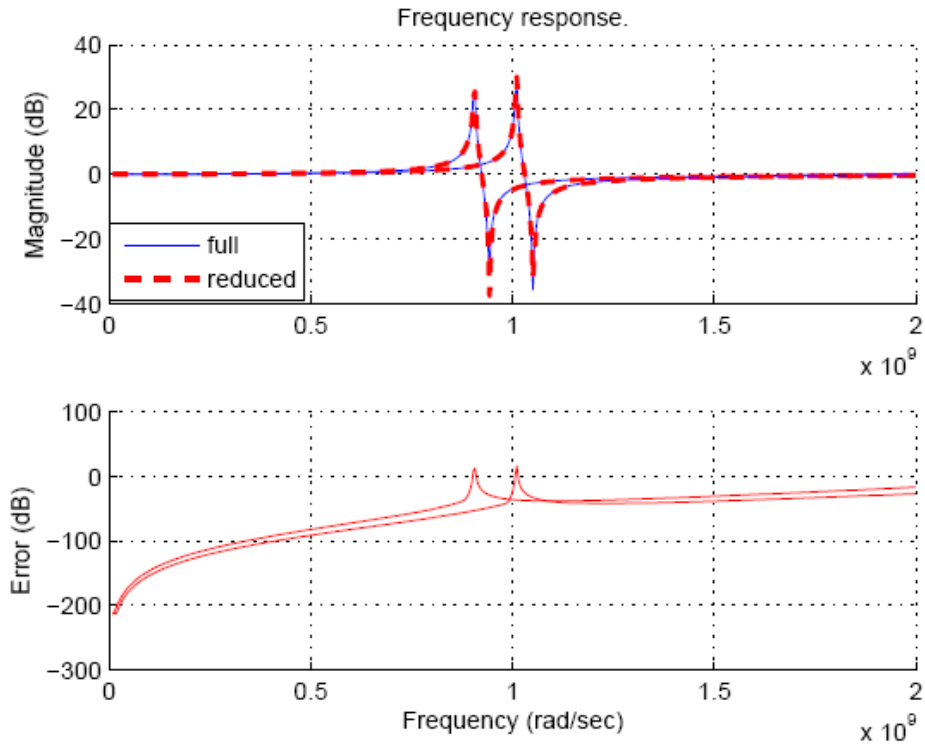


图 34 多参数变化下的 OCFR 算法仿真结果

### 4.3 OCFR 算法另一种矩匹配形式

在 3.7.4 中我们提到有 3 种矩匹配的形式，在  $s=0, s=s_0, s=\infty$  点匹配，其中第二种情况是一般的情况，第一种情况是第二种情况的特殊情况  $s_0=0$ ，而第三种矩匹配形式是不能由第二种形式推得的，所以这里讨论一下 OCFR 算法在  $s=\infty$  情况下的矩匹配形式。但是对于这种情况要求使用 MNA 算法得到的状态方程系数矩阵  $C$  为可逆矩阵，所以这里选取一个符合该条件的例子来验证这种形式下的矩匹配。图中所示是一个 RC 阶梯电路，该模型可以被用来对于导线的时序分析建模。其中参数的取值是  $R_i = 20 \Omega$ ,  $C_i = C_{gi} = 1 \text{pF}$ ,  $g_s = 1/50 \text{S}$ ，另外  $n=100$ ，表示该模型由 100 个基本的 RCC 段组成，该模型使用 MNA 算法得到的阶数是 100，我们选取  $V_1$  点为观测点。

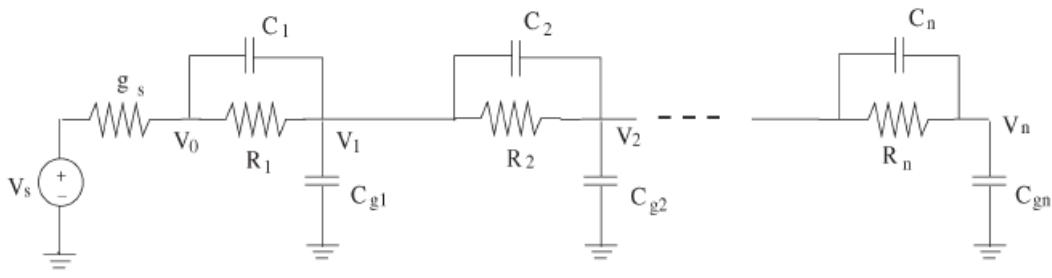


图 35 RCC 阶梯导线模型

图 38 中所示的是观测点  $V_1$  的频率响应，可以看出由于采用的是  $s = \infty$  形式下的矩匹配，所以从图形中看到，对于高频情况下（大于  $10^9$ ）频率匹配很好，但是在频率比较低的情况下就有了一点误差，这也验证了理论分析中高频率下匹配好的特性。

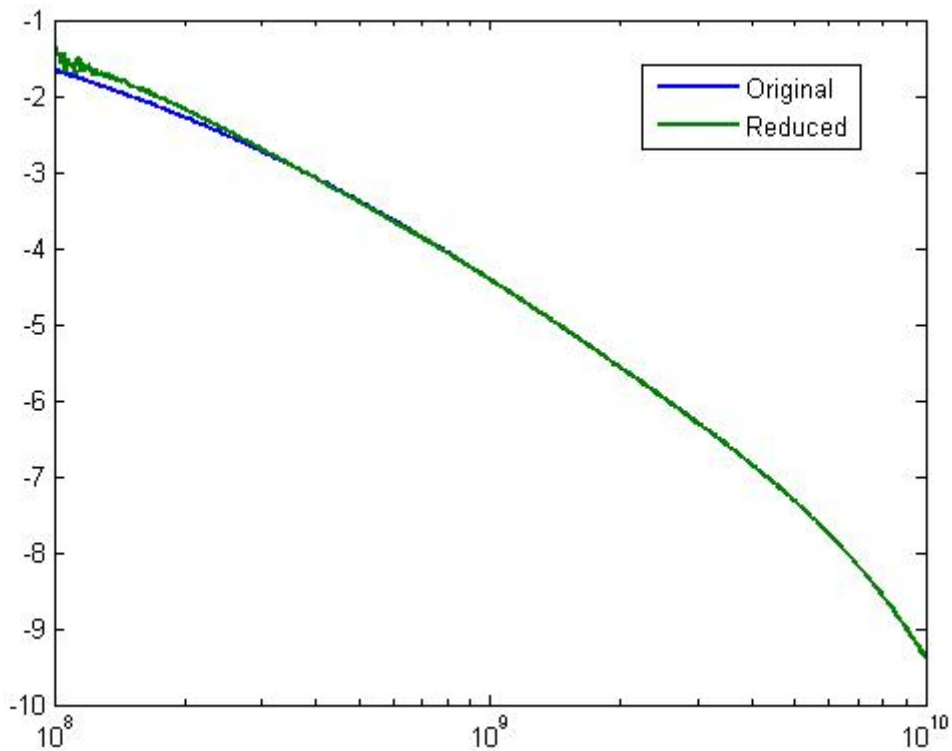


图 36 降阶模型与原模型的频率响应比较

图 39 及图 40 所示的是降阶模型与原模型的极点及阶跃响应比较，可以看出降

阶模型的极点都在左半平面，说明该降阶模型是稳定的。另外，从阶跃响应图可以看出降阶模型在时域上也能够很好地匹配原模型，在阶数很低的情况下也能够很准确地反映原模型的特征，体现了模型降阶算法的价值所在。

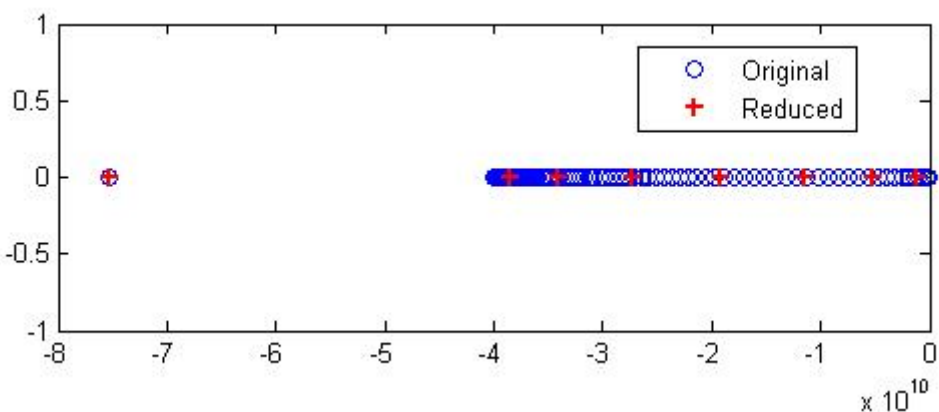


图 37 降阶模型与原模型的极点

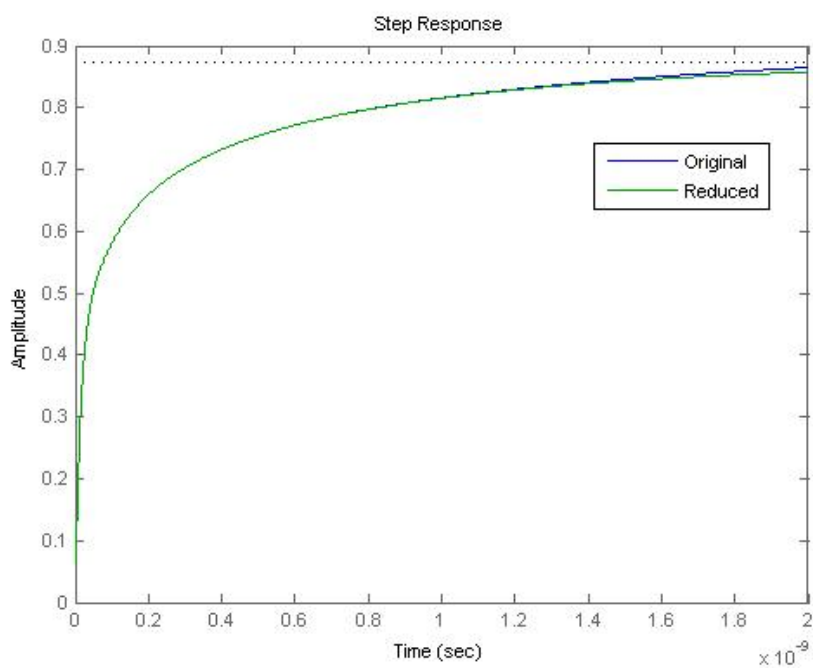


图 38 降阶模型与原模型的阶跃响应比较

## 5 总结与展望

### 5.1 本文的研究内容

本文首先介绍了模型降阶算法的基本思想及在新的设计水平下所碰到的信号完整性问题,并且提出了模型降阶算法在解决信号完整性问题方面的应用及发展趋势。接下来,本文对于模型降阶领域的几个经典算法 AWE、PRIMA 做了研究,阐述了它们的思想及碰到的问题,接下来对于模型降阶领域的最新算法 SPRIM 进行了阐述,仔细分析了新算法与传统算法的比较的优点,并且本文对于为了解决由于特征尺寸减小造成参数变化情形下的模型降阶算法——与插值结合的模型降阶算法及基于区间分析的模型降阶算法进行了介绍。

接下来提出了本次毕业设计的研究成果——基于可观测标准型的可分析参数变化情况下多输入多输出系统的模型降阶算法,并且对于本算法的想法的产生,及数学推导过程作了进一步的说明。

在实验部分,我们选取了存在耦合的互连线模型验证了本文提出的 OCFR 算法在频域上和时域上与原模型的拟合精确度,说明了本算法能够分析互连线之间的串扰来解决信号完整性问题。实验结果表明模型降阶算法能够以比原电路小得多的模型达到接近于 SPICE 的精度,这对于大规模集成电路的信号完整性分析具有重大的意义。

模型降级技术目前还在发展,包括考虑工艺参数异动、非线性、符号化的模型降级技术在未来的几年中将会是研究的热点。随着 65 纳米,甚至 45 纳米工艺的逐渐普及,对信号完整性的要求可以说是越来越强烈,因此模型降阶作为其中的关键技术也值得我们更多的关注和研究。

### 5.2 课题碰到的问题及进一步研究方向

该算法在计算过程中与传统模型降阶算法相比有优势但是也存在一定局限性,总结下来,主要有以下两个方面值得继续探讨:

### 1. Krylov 子空间计算

在 Krylov 子空间计算过程中, 我们需要计算下式

$$LA^q \approx -M_0L - M_1LA - \dots - M_{q-1}LA^{(q-1)}$$

由于 Krylov 子空间计算理论依据是项  $L, LA, \dots, LA^{(q-1)}$  当  $q$  的值上升时会变得线性相关, 所以新的项能够近似由之前的项来线性表示, 但是正是因为有这个特性, 在实际计算过程中, 矩阵  $M_0, M_1, \dots, M_{q-1}$  的模会随其序号数上升而差别变得很大, 当  $q$  稍大时,  $M_0$  的模与  $M_{q-1}$  甚至要相差上百个数量级, 这样对计算的精度提出了很大挑战, 这也造成了在 OCFR 算法中阶数不能取大的问题, 否则得到降阶模型的精度会下降很大。为了具体说明, 这里将举例定量说明该问题。为简单起见, 选取系统为单输入单输出系统, 这时  $M_0, M_1, \dots, M_{q-1}$  均为单个变量, 我们这里标记为  $m_0, m_1, \dots, m_{q-1}$ 。我们选取 4.2 节中的 RLC 导线为例, 原电路阶数为 100, 我们将其降阶到 15 阶, 得到的  $m_0, m_1, \dots, m_{14}$  值为

$m_0$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$
6.7151e-156	-2.2826e-147	1.9791e-133	-2.5324e-124	1.0619e-111
$m_5$	$m_6$	$m_7$	$m_8$	$m_9$
-2.4173e-102	1.642e-90	-5.4893e-81	9.2626e-70	-4.1699e-60
$m_{10}$	$m_{11}$	$m_{12}$	$m_{13}$	$m_{14}$
1.9251e-49	-1.1292e-39	1.1492e-29	-9.1662e-20	3.1947e-11

表 4  $m_0, m_1, \dots, m_{14}$  计算结果

可以看出  $m_0$  的值与  $m_{14}$  相差了 145 个数量级, 这样的大小差距即使对于现代计算机在计算过程中也会产生一定误差。

这种 Krylov 子空间计算产生的数值误差是 Krylov 子空间算法本身的问题, 如要改进必须从算法层面上改进。对于类似的问题, PRIMA 算法中的做法是不直接得到由这些值表示的降阶矩阵, 而是通过 Krylov 正交求出的矩阵  $X$ , 满足

$$\text{colsp}(X) = \text{Kr}(A, R, q)$$

$$X^T X = I_q$$

$$X^T A X = H$$

来对电路状态方程中的 C、G、B、L 作矩阵变换, 得到

$$\hat{C} = X^T C X \quad \hat{G} = X^T G X$$

$$\hat{B} = X^T B \quad \hat{L} = X^T L$$

这样的过程得到的降价矩阵  $\hat{C}, \hat{G}, \hat{B}, \hat{L}$  条件数要小于 OCFR 算法得到的降价矩阵。因此 PRIMA 能够使用较高的阶数。但是 PRIMA 也有其缺点，那就是在同样阶数情况下 OCFR 算法得到的降阶系统精确度比 PRIMA 算法好，因为 OCFR 算法在相同的阶数下能够比 PRIMA 算法匹配更多的矩。所以在这种情况下，OCFR 算法对于模型并不复杂，例如 RLC 传输线，RC 阶梯电路等情况下能够用很低的降阶模型来替代原系统模型，并且能够保持较好的精度。而对于耦合比较严重，需要使用较高阶数的降阶模型防止效果不是很好。这种特性说明了 OCFR 算法能够比较好地应用于电路的静态时序分析上，这也是我下一步研究的目标。

## 2. Lagrange 插值算法

在本次毕业设计中我们使用 OCFR 算法与 Lagrange 插值算法结合来解决参数变换情况下的模型降阶问题。我们在将 Lagrange 插值算法从 1 维扩展到多维时作了线性化分析的近似。在实际计算过程中对于 R 值的变化可以比较好地使用该算法解决，但是当 C 值和 L 值变化时，其中存在很大的非线性性，C 值和 L 值变化很小的情况便会对输出产生很大影响，所以在 4.2 节中我们用来验证 OCFR 算法所限定的 R、L、C 变化区间为  $[0.8R_0, 1.2R_0]$ 、 $[0.8L_0, 1.2L_0]$ 、 $[0.8C_0, 1.2C_0]$ ，这样才能够得到比较好的插值结果。在实际计算中，如果把 L、C 变化区间设得过大，输入结果误差就比较大。由于理论部分已经提到过，OCFR 算法的优点是得到的降价矩阵中未知参数比较少，这样的结果最适合于做插值运算，因为在参数少情况下使用插值运算的结果要比参数多情况下误差小，并且由于参数少，每次采样存储需要的空间少，适合取大量的采样点进行蒙特卡罗分析。

但是前面研究背景中已经介绍过，分析参数变化情况下模型降阶的方法有很多方法，我们也提到其中一种比较受到关注的方法是 James D Ma 提出的基于区间的分析方法，而基于区间分析的方法是一种通用的算法，已经被广泛使用于图像处理领域。我们也准备将 OCFR 算法与区间分析方法结合，这是我下一步研究的方向。

## 参考文献

- [1] L. Nagel, "SPICE2, A computer program to simulation semiconductor circuits," Univ. California, Berkeley, CA, TR ERL-M520, May 1995
- [2] P. Feldmann and R. W. Freund. "Reduced-order modeling of large linear sub circuits via a block Lanczos algorithm," In Proc. 32<sup>nd</sup> ACM/IEEE Design Automation Conference, pages 474-479, New York, New York, 1995
- [3] L. T. Pillage and R. A. Rohrer, "Asymptotic waveform evaluation for timing analysis," IEEE Trans. Computer-Aided Design, vol. 9, pp. 352-366, Apr. 1990
- [4] E. Chiprout and M.S. Nakhla. "Analysis of interconnect networks using complex frequency hopping", IEEE Transactions on computer-aided design of integrated circuits and systems. February, 1995.
- [5] P. Feldman and R. W. Freund, "Efficient Linear Circuit Analysis by Pade Approximation Via the Lanczos Process", IEEE Trans. Computer-Aided Design, vol. 14, no. 5, pp. 639-649, May 1995
- [6] L.M.Silveira, M.Kamon, I.Elfael, and J.White, "A coordinate-transformed Arnoldi algorithm for generating guaranteed stable reduced-order models of arbitrary RLC circuits," in IEEE/ACM pro. ICCAD, Nov. 1996, pp. 88-294.
- [7] K. J. Kerns, I. L. Wemple, A. T. Yang, "Stable and Efficient Reduction of Substrate Model Networks using Congruence Transformation", ICCAD, Nov. 1995
- [8] A.Odabasioglu, M.Celik, and L.T.Pillage, "PRIMA: Passive reduced-order interconnect macro modeling algorithm," IEEE Trans. Computer-Aided Design, vol. 17, No. 8, pp. 645-654, Aug.1998.
- [9] Freund, R.W, "SPRIM: structure-preserving reduced-order interconnect macromodeling," ICCAD2004. IEEE/ACM International Conference on Computer Aided Design, 2004. 7-11 Nov. 2004, pp. 80 - 87
- [10] C.W. Ho, A.E. Ruehli and P.A. Brennan, "The modified nodal approach to network analysis", IEEE Trans. Circuits and Systems, CAS-22, June 1975, pp. 504-509
- [11] H.Liao, W.Dai, R.Wang, F.Y.Chang, "S-Parameter based macro model of distributed-lumped networks using exponentially decayed polynomial function," Proceedings of the 30<sup>th</sup> ACM/IEEE Design Automation Conference, pp.726-731, June 1993.

- [12] Xiao dong Yang, Chung kuan Chen, Walter H. Ku, Robert J. Carragher, "Hurwitz stable order modeling for RLC interconnect Trees," in IEEE/ACM pro. ICCAD, Nov. 2000, pp 222-228.
- [13] Bernard sheehan, "TICER: Realizable reduction of extracted RC circuits," in IEEE/ACM pro. ICCAD, Nov.1999, pp. 200-204.
- [14] R.D. Teasdale, "Time domain approximation by use of Pade approximations," IRE Convention Record Vol.1, pt.5 pp. 89-94, 1953.
- [15] Chungping Chen, and D.F.Wong, "Error bounded pade approximation via bilinear conformal transformation," Proceedings of the 36th ACM/IEEE Design Automation Conference, pp.7-13, June 1999.
- [16] K. Glover, "All optimal Hankel-norm approximation of linear multivariable systems and their  $r L^\infty$  - error bounds." Int. J. Control, Vol.39, No.6, pp 1115-1193, 1984.
- [17] Jing-Rebecca Li, etc. "An efficient lyapunov equation-based approach for generating reduced-order models of interconnect," Proceedings of the 6th ACM/IEEE Design Automation Conference, pp.1-6, June 1999.
- [18] Janet M.Wang, Qingjian Yu and Ernet S. Kuh, "Passive model order reduction algorithm based on Chebyshev expansion of impulse response," Proceedings of the 6th ACM/IEEE Design Automation Conference, pp. 520-526, June 2000.
- [19] W. C. Elmore, "The Transient Response of Damped Linear Networks with Particular Regard to Wideband Amplifiers", J. Applied Physics, vol. 19, no. 1, Jan. 1948
- [20] R. Kay and L. Pileggi, "PRIMO: Probability interpretation of moments for delay calculation," in Proc. IEEE/ACM Design Automation Conference, June 1998, pp. 463-468
- [21] T. Lin, E. Acar, and L. Pileggi, "h-gamma: An RC delay metric based on a gamma distribution approximation to the homogeneous response," in Proc. IEEE/ACM Int. Conf. Computer-Aided Design, Nov. 1998, pp. 19-25
- [22] Xiaodong Yang, Walter H.Ku, Chung-Kuan Cheng, "RLC Interconnect delay estimation via moments of Amplitude and Phase Response", in Proc. IEEE/ACM Int. Conf. Computer-Aided Design, Nov. 1999, pp. 208-303
- [23] Kevin J. Kerns and Andrew T. Yang, "Stable and Efficient Reduction of Large, Multiport RC Networks by Pole Analysis via Congruence Transformations." IEEE



Trans. Computer-Aided Design, vol. 16, No. 7, pp.734-744, July 1997.

[24] K. J. Kerns, "Accurate and stable reduction of RLC networks using split congruence transformations," Ph.D. dissertation, Univ. Washington, Sept. 1996

[25] Curtis L. Ratzlaff and Lawrence T. Pillage, "RICE: Rapid Interconnect Circuit Evaluation Using AWE", IEEE Trans. Computer-Aided Design, vol. 13, No. 6, pp 763-776, June 1994

[26] A. E. Ruehli. "Equivalent circuit models for three dimensional multiconductor systems," IEEE Trans. Microwave Theory Tech, vol. 22, pp. 216-221, 1974

[27] R. W. Freund and P. Feldmann. "Reduced-order modeling of large passive linear circuits by means of the SyPVL algorithm," In Tech. Dig. 1996 IEEE/ACM International Conference on Computer-Aided Design, pages 280-287, Los Alamitos, California, 1996. IEEE Computer Society Press

[28] R. W. Freund and P. Feldmann. "The SyMPVL algorithm and its applications to interconnect simulation," In Proc. 1997 International Conference on Simulation of Semiconductor Processes and Devices pages 113-116, Piscataway, New Jersey, 1997. IEEE

[29] D. L. Boley, "Krylov space methods on state-space control models," Circuits Syst. Signal Processing, vol. 13, no. 6, pp. 733-758, 1994

[30] James D. Ma and Rob A. Rutenbar. "Fast Interval-Valued Statistical Modeling of Interconnect and Effective Capacitance," IEEE trans. Computer-Aided Design, vol. 25, NO. 4, APRIL 2006

[31] Y. Liu, L. T. Pileggi, and A. J. Strojwas, "Model order-reduction of RC(L) interconnect including variational analysis, " in Proc. Design Automation Conf., New Orleans, LA, 1999, pp. 201-206.

[32] Guoyong Shi, Bo Hu, C.-J. Richard Shi. "On Symbolic Model Order Reduction," IEEE. Trans. on computer-aided design of integrated circuits and systems. July 2006

[33] Vinod Kariat and Rahul Deokar, "Adapting signal integrity to nanometer IC design," <http://www.eetimes.com/news/design/features/showArticle.jhtml?articleID=184429929&pgno=3>

[34] Claire Fang Fang, "Probabilistic Interval-Valued Computation: Representing and Reasoning about Uncertainty in DSP and VLSI Design", Ph.D. dissertation, Dept. of

Electrical and Computer Engineering, CMU, 2005

[35] Guoyong Shi and C.-J. Richard Shi, “Parametric Reduced Order Modeling for Interconnect Analysis”, in Proc. Asia South Pacific Design Automation Conf.(ASPDAC), Yokohama, Japan, 2004, pp. 774-779.

## 致谢

时光如梭，转眼间，我已在母校度过了6年的学习生活，虽然接下去我还要留在母校继续攻读博士学位，但是过去两年的学习生活将会是让我一生难忘的，因为它是我人生观形成的过程，是我的思想从稚嫩逐步走向成熟的过程。

首先要感谢我的父亲母亲，在过去的两年中，您们默默给予我无微不至的关怀，不求回报；您们给予我充分的信任，让我自己选择自己的人生；你们一直都是我最坚强的后盾，给予我信心，赋予我战胜困难的力量。在这里我要向您们深深地鞠一躬，“爸爸，妈妈，您们辛苦了！”。

其次，我要感谢我的硕士阶段指导老师施国勇教授，在这里我要向您深深地道一声：“谢谢您！”。在过去的两年多的时间中，您用您的责任和认真感染了我们小组中的每一个人。您缜密的思维，渊博的学识及对行业发展富有穿透力的预见让我们从您那里学到了很多。如今在您的05级学生们取得成绩继续深造、拿到令人羡慕的工作 Offer，即将开始崭新的生活时，作为您的学生，我深切感受到这将是您最快乐的时候，我们所取得的成绩以及前程似锦的发展前途都是对您为人师表，甘于奉献的工作热情的最诚挚的回报。我现在依然清楚记得刚刚开始从事一些研究工作时，遇到了不小的困难，没有想法，无从下手。但您对于我无知的询问总是不厌其烦地解释，并且您总是以一个引导者的姿态来帮助我，为我留下了锻炼和思考的空间，让我逐步提高研究能力。您用您的亲身经历告诉我们，研究并不困难，好的想法并不是空穴来风，而是在你搞懂问题的前因后果之后一个自然的想法，并不存在巨大的思维跳跃性。您不仅在学业上指导我们，也教会了我们怎样做人。我们在您身上看到了您简单+勤奋的生活态度，您对于工作所表现出的热情深深地感染了我们。您对于我们偷懒给予的批评及对于抄袭现象的深恶痛绝让我们看到了您正直的做人品格。如今，我非常荣幸地成为了您的第一位博士生，在将来的学习生活中，我将尽我最大努力协助您工作，并且将用您赋予我们的思想和品格来帮助和影响周围更多的同学。

另外，在过去两年的学习生活中，我还要特别感谢付宇卓教授，祝永新教授，及赵峰老师，感谢您们和我分享您们的经历，给予我帮助，为我在困惑期间指明了方向。还要感谢毛志刚老师，汪辉老师，黄其煜老师，郭炜老师等，没有您们认真的教学，我们就不会掌握扎实的知识基础，继续更高阶段的工作，研究。我也要感谢学院的胡薇薇老师、杨薛雯老师、郁美娟老师等所做的各类行政工作，您们的辛勤工作为我们带来了丰富多彩的课余生活，您们为我们带来的最新各类信息也

使我们能够有更多的时间投身于研究与实践，提高自己的专业能力。

这里还要感谢我们 05 级 EDA 小组成员蒋历国，李小南，彭修宇，王骝，很高兴能够和你们在一起讨论、研究，在我们共同努力下，我们 EDA 小组的研究工作终于有了一定进展，逐步步入正轨。如今在我们即将各奔东西，继续我们各自的求学及工作的时候，想必你们一定也像我一样珍惜过去两年在一起学习，讨论的时光吧，这里向你们道一声：“珍重，同学！”。感谢王炯，邹峰，姜浩，郭春暄，朱磊，梅华灯，曹晔，有了你们，我们的套间成为了一个勤奋积极但又不乏欢声笑语的集体，在即将分别之际，我也祝你们事业有成，生活美满！

过去两年的学习生活中还有太多的感触，太多的人值得我感谢，这里不一一列举了，但是我要感谢我们的大家庭——上海交通大学微电子学院，我们的学院是一个年轻的学院，但是她却是一个充满温馨和进步的地方，我很荣幸地见证了她的成长，并且感受到了其中发生的故事，这些都将是令我终生难忘的。

郝志刚

2008 年 1 月 10 日

## 攻读学位期间发表的学术论文

1. Zhigang Hao and Guoyong Shi. "Parametric Analysis of Multiple Interconnects via Canonical Reduced Order Modeling," In Proc. IEEE 7th International Conference on ASIC, Guilin, China, 2007. pp. 1133-1137